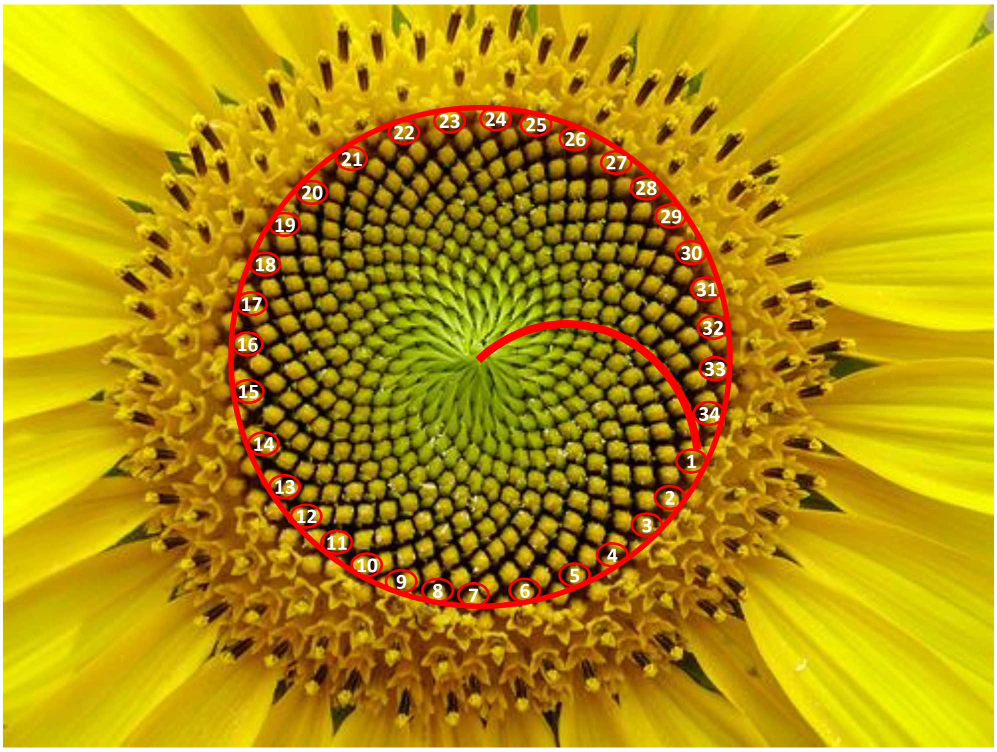


Goldene Spiralen und Kreise im Kreis

Michael Bischoff, Parkstr. 49, D-89250 Senden

1. Fibonacci Reihe

Dem italienischen Mathematiker Leonarda von Pisa (1170 – 1250), besser unter dem Namen Fibonacci – der Kurzform von filius Bonacci, (Sohn des Bonacci) – bekannt, hat folgende Reihe definiert, angeblich um das Wachstum einer Kaninchenpopulation zu beschreiben.
Mit den definierten sogenannten „Fibonacci-Zahlen“ F_n und

$$\boxed{F_0 = 0 \text{ und } F_1 = 1 \quad \text{gilt} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}} \tag{1.1}$$

Die ersten Fibonacci-Zahlen ergeben sich damit zu

0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 89; 144; 233; 377; 610; 987; 1597; .....

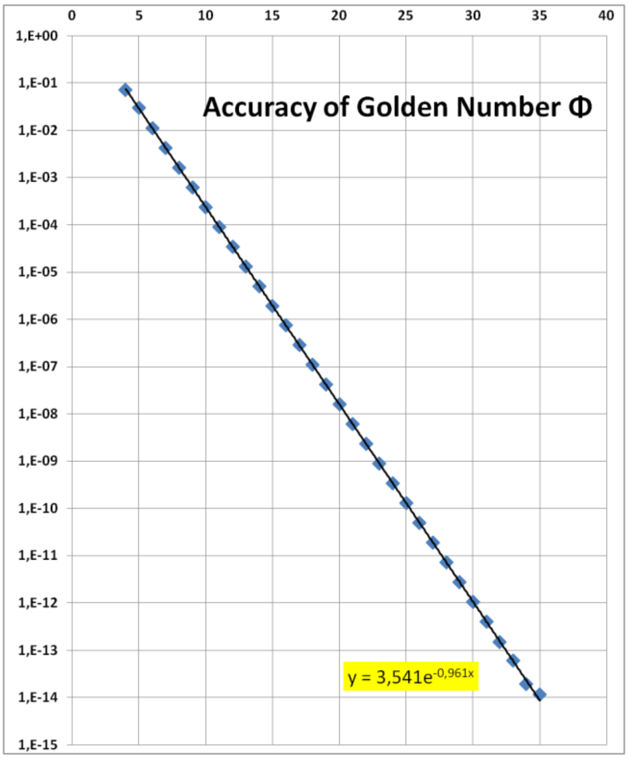
Für die Fibonacci-Zahlen gibt es überraschende Zusammenhänge mit anderen Teilgebieten der Mathematik, Physik und der Natur.

Unter anderem gibt es einen Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt in der Form, dass das Verhältnis aneinander folgender Fibonacci-Zahlen sich dem „Goldenen Schnitt“ Φ (griechischer Buchstabe großes Phi) schnell nähert.

$$\boxed{\Phi = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1{,}61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ \ldots} \tag{1.2}$$

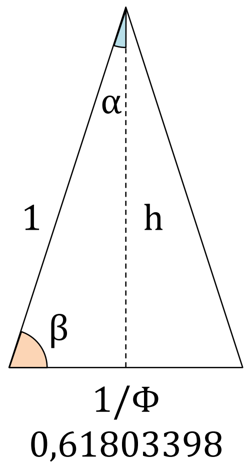
Schon die zehnte Fibonacci-Zahl 34 (zweistellig) nähert sich dem Goldenen Schnitt auf 10^{-4} an, die zwanzigste F_{20} (als vierstellige Zahl = 6765) ergibt einen Fehler von nur 10^{-8} und die dreißigste F_{30} (sechsstellig !) ist auf 10^{-12} genau.

Für weitere Einzelheiten siehe das Literaturverzeichnis [Lit. 1 – 3]



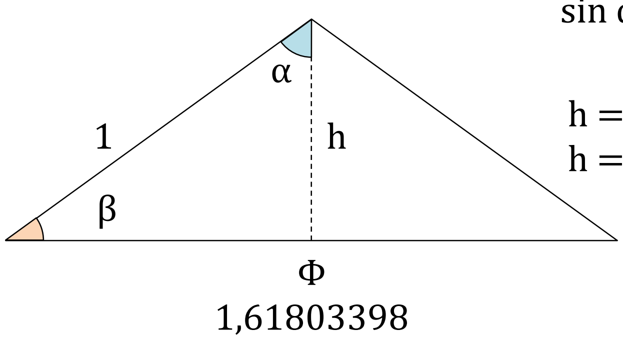
1. Der Goldene Schnitt im Dreieck

Gleichschenklige Dreiecke der folgenden Form bieten interessante Möglichkeiten



$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1/2}{\Phi} \quad >>> \quad \alpha = 18^0 \quad >>> \quad \beta = 72^0$$

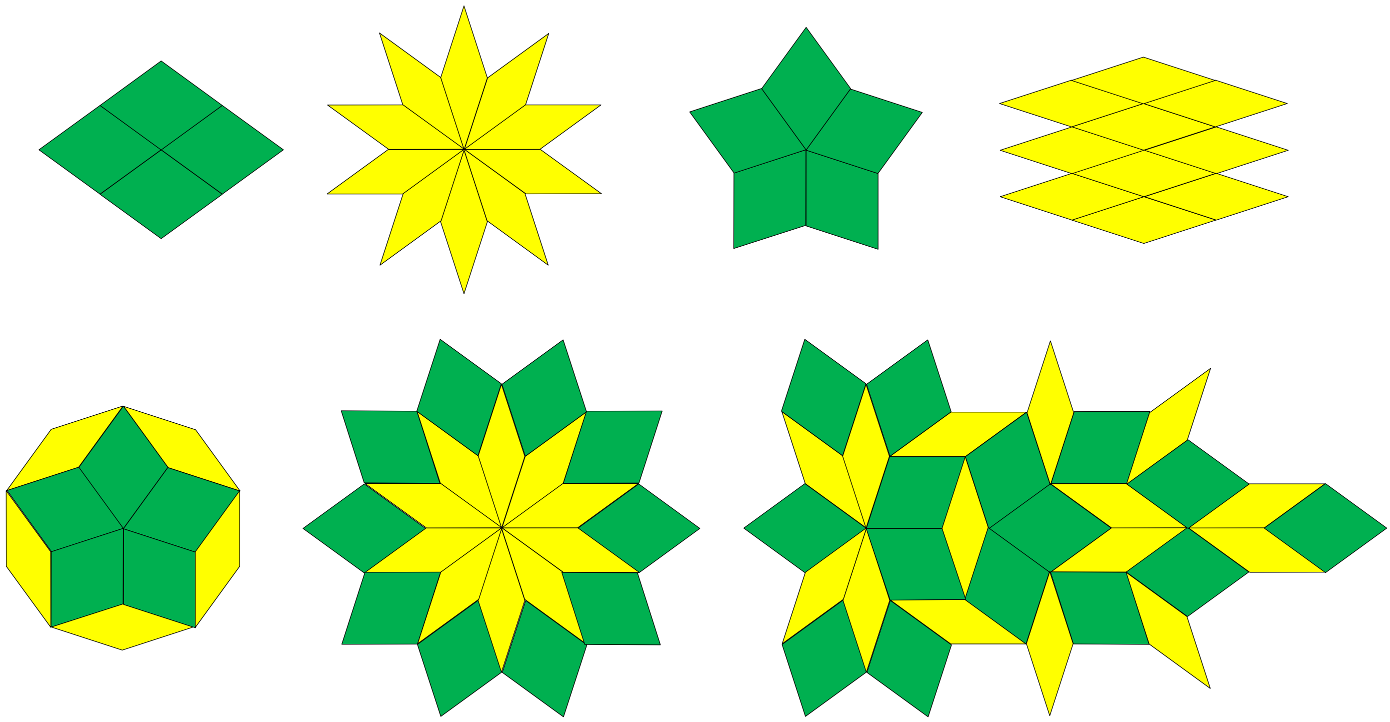
$$h = \sqrt{1 - (0{,}5/\Phi)^2}$$
$$h = 0{,}9510565$$



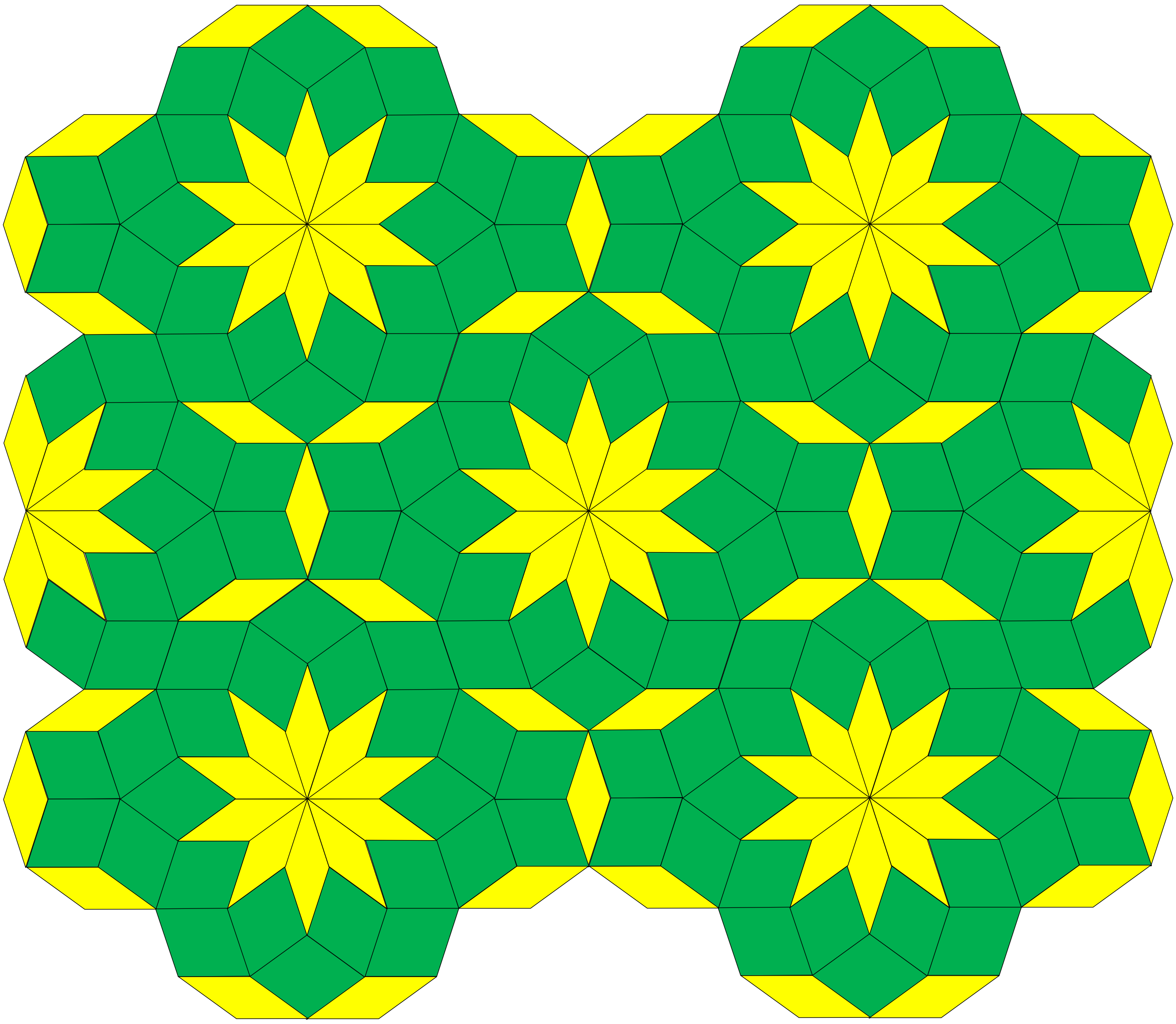
$$\sin\alpha = \cos\beta = 0{,}5\ \Phi \quad >>> \quad \alpha = 54^0 \quad >>> \quad \beta = 36^0$$

$$h = \sqrt{1 - (0{,}5\Phi)^2}$$
$$h = 0{,}5877853$$

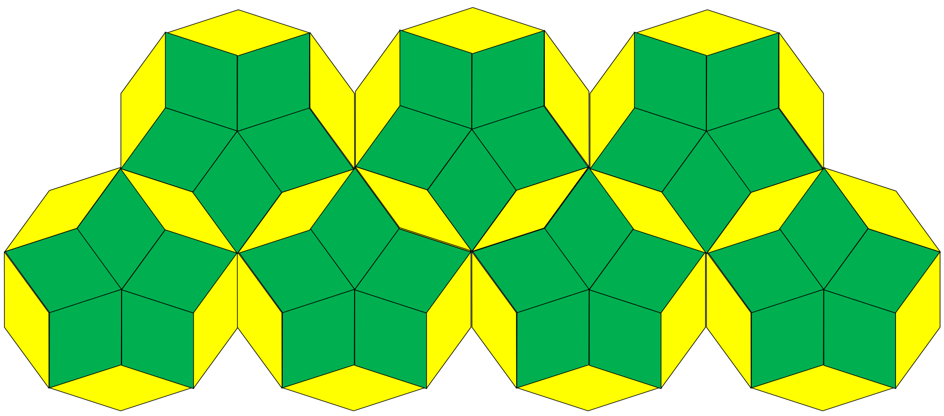
Spiegelt man die Dreiecke an der Φ-Achse so ergeben sich „goldene Rauten“ mit n-fachen Winkeln von 18 Grad, die sich zu zahlreiche Figuren legen lassen.



1. Der Goldene Schnitt im Dreieck

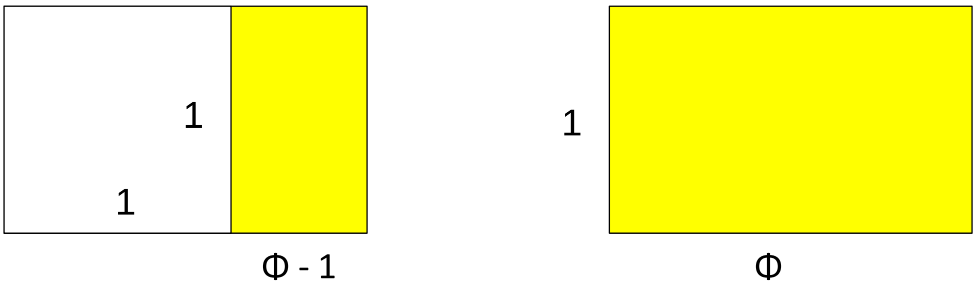


Die Möglichkeiten der regelmäßigen und auch scheinbar unregelmäßigen Parkettierungen scheinen unendlich zu sein



1. Der Goldene Schnitt im Rechteck

Der Goldene Schnitt ergibt sich aus der graphischen Definition eines Rechteckes Indem sich selbstähnliche Flächen wie folgt ergeben.



Es gilt:

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \qquad \text{ausmultiplizieren}$$

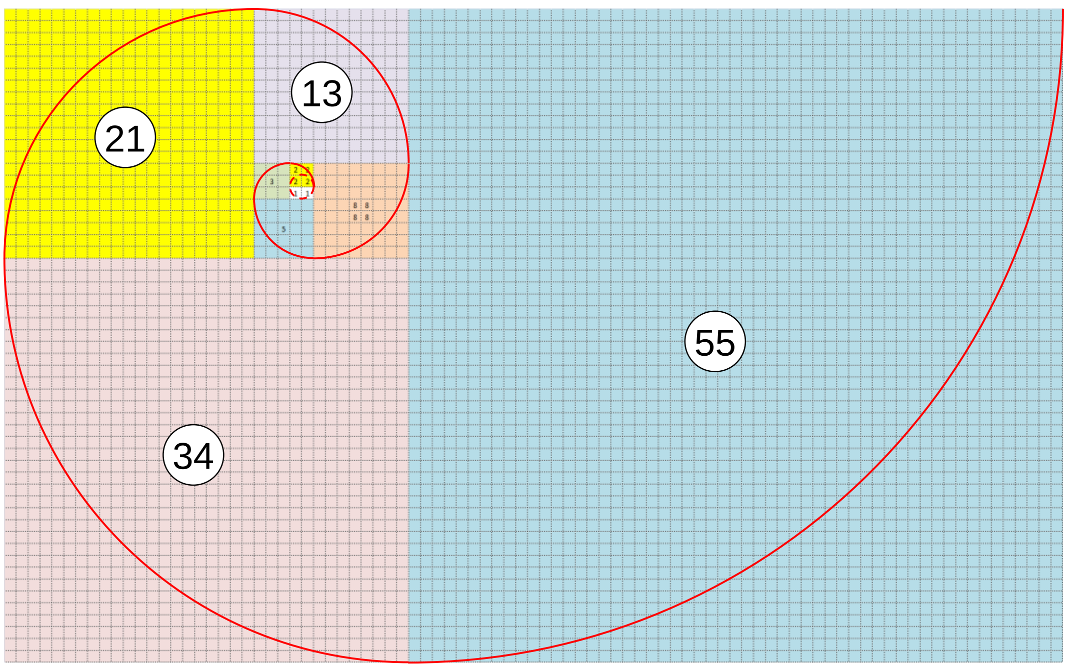
$$\Phi^2 - \Phi = 1 \qquad \text{quadratische Ergänzung}$$

$$\Phi^2 - 2\frac{\Phi}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + ¼ = \frac{5}{4} = \left(\Phi - \frac{1}{2}\right)^2$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen $\Phi_{1,2} = 0{,}5\,(1 \pm \sqrt{5}\,)$
Die positive Lösung beschreibt den „Goldenen Schnitt“

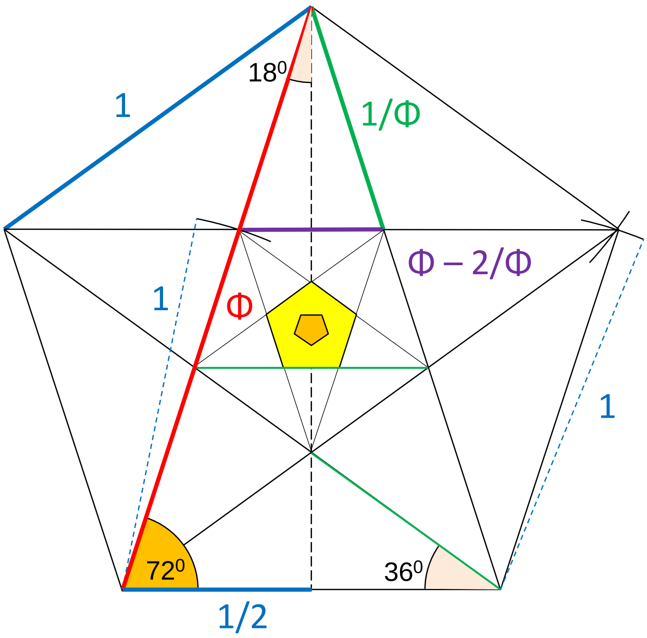
$$\boxed{\Phi = \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{5}\,)} \qquad (1.3)$$

Zeichnet man die Fibonacci Zahlen als Quadrate wie u.a. und verbindet diese mit jeweils einem wachsenden Viertelkreis so erhält man eine „Goldene Spirale“



1. Der Goldene Schnitt im Fünfeck/ Pentagon

Konstruiert man ein Fünfeck mit der Einheitslänge 1 so ergibt sich folgendes Bild.



Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt das Verhältnis der violetten zur blauen Länge welches ähnlich der grünen zur roten Länge ist.

$$\frac{\Phi - 2/\Phi}{1} = \frac{1/\Phi}{\Phi}$$ ausmultiplizieren

Dies ergibt eine kubische Gleichung in Φ

$$\Phi^3 - 2\,\Phi = 1$$ siehe Anhang

Mit der Lösung $\Phi = 1{,}618\ \ldots$ dem bekannten Wert des Goldenen Schnittes.

Der Verkleinerungsfaktor der Fünfecke beträgt $\Phi - 2/\Phi = 0{,}381\,965\ \ldots$

Mit dem Dreiecks-/ Eckenwinkel von 36 & 72 Grad lassen sich auch Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen und dem Goldenen Schnitt ableiten Denn es gilt mit dem Cosinus bzw. auch über die Sinusfunktion

$$\cos 72^0 = \frac{1/2}{\Phi} \qquad \sin 18^0 = \frac{1/2}{\Phi} \qquad \cos 36^0 = \frac{1/2}{1/\Phi}$$

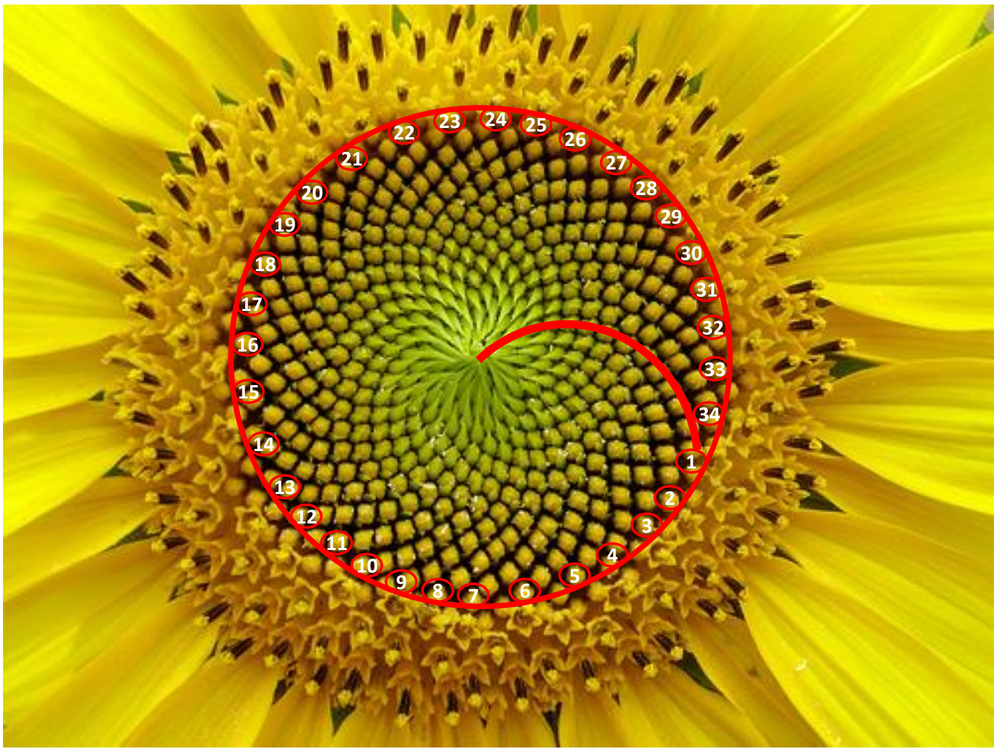
woraus folgt

$$\boxed{\Phi = \frac{0{,}5}{\cos 72^0} \qquad \Phi = \frac{0{,}5}{\sin 18^0} \qquad \Phi = 2\cos 36^0} \tag{1.4}$$

1. Fibonacci Reihen in der Natur

Der „Goldene Schnitt“ wird in der Kunst als „schönstes“ Teilungsverhältnis angesehen, da der Mensch dieses Verhältnis bei Abmessungen von Bildern, Häusern oder ähnlichem als besonders „schön“ empfindet.

Auch in der Natur findet man den Goldenen Schnitt bzw. die Fibonacci Zahlen bei besonders schönen Blumen wieder.



Diese Sonnenblume hat am äußeren Rand 34 Sonnenblumenkerne. Man findet auch bei anderen Blumen Fibonacci Zahlen, z.B.

Kleeblatt – 3 Wildrose – 5 Scharbock – 8 gelbe – 13 weiße Gänsebl. – 21

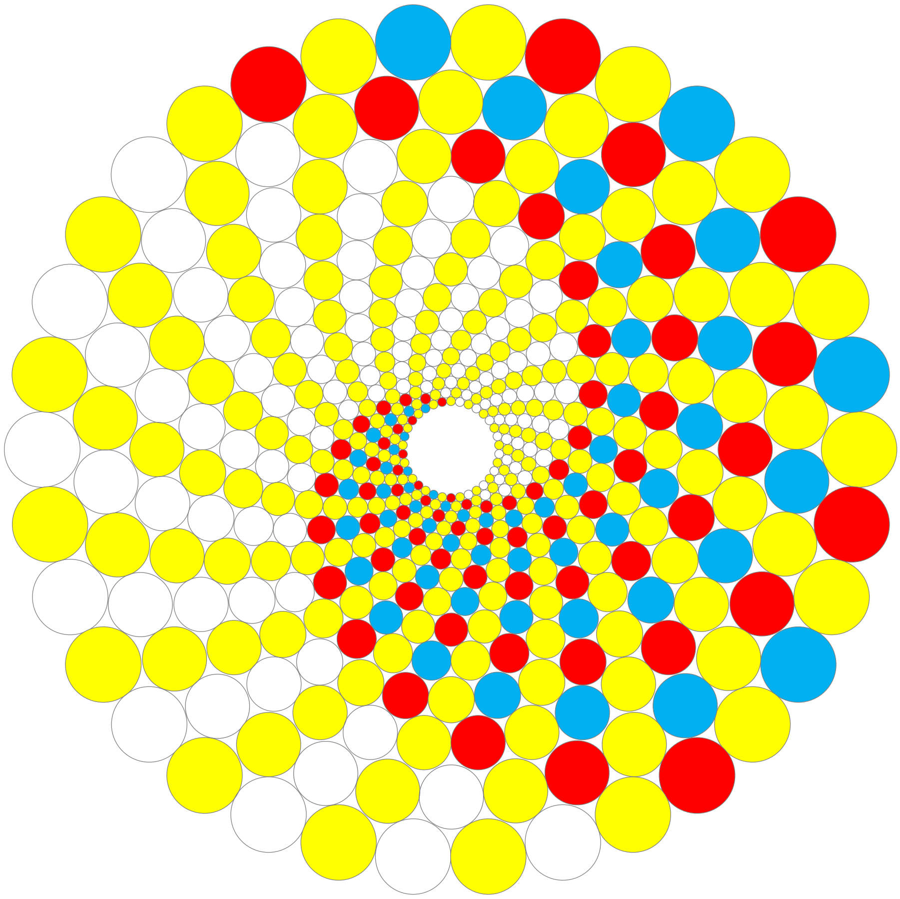
    

Warum die Natur zufälligerweise diese Zahlen wählt ist bisher nicht sicher verstanden, denn natürlich können Kreise auch mit jeder anderen Zahl realisiert werden (und Blumen halten sich auch nicht immer an diese „Regel“).

Beim obigen Exemplar sieht man sehr schön die wachsenden Kreise die sich perfekt zu einer Spirale fügen.

2. Kreise im Kreis

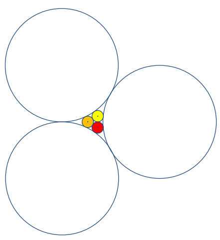
Die spiralförmig angeordneten Blumenblätter/ Samenkörner in der Natur lassen sich sehr einfach durch Kreise im Kreis wie folgt erzeugen.



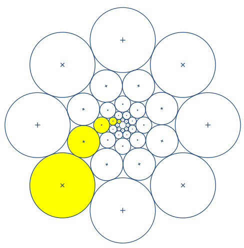
Dabei werden einfach N Kreise mit dem Durchmesser d im Kreis angeordnet. Die nächsten – etwas kleineren Kreise – werden um einen Winkel $180^0/N$ gedreht und so verkleinert, dass diese die äußeren Kreise tangieren. Im obigen Beispiel wurde N = 34 (die zehnte Fibonacci-Zahl) dargestellt.

Mit dieser „Bauvorschrift“ kann man jede kreisförmige Spirale konstruieren, auch die mit den Fibonacci-Zahlen, beginnend mit den kleinsten Kreisen für

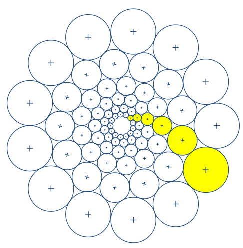
N = 3



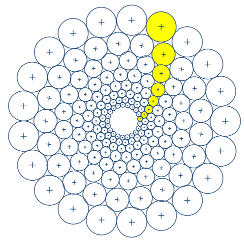
N = 8



N = 13



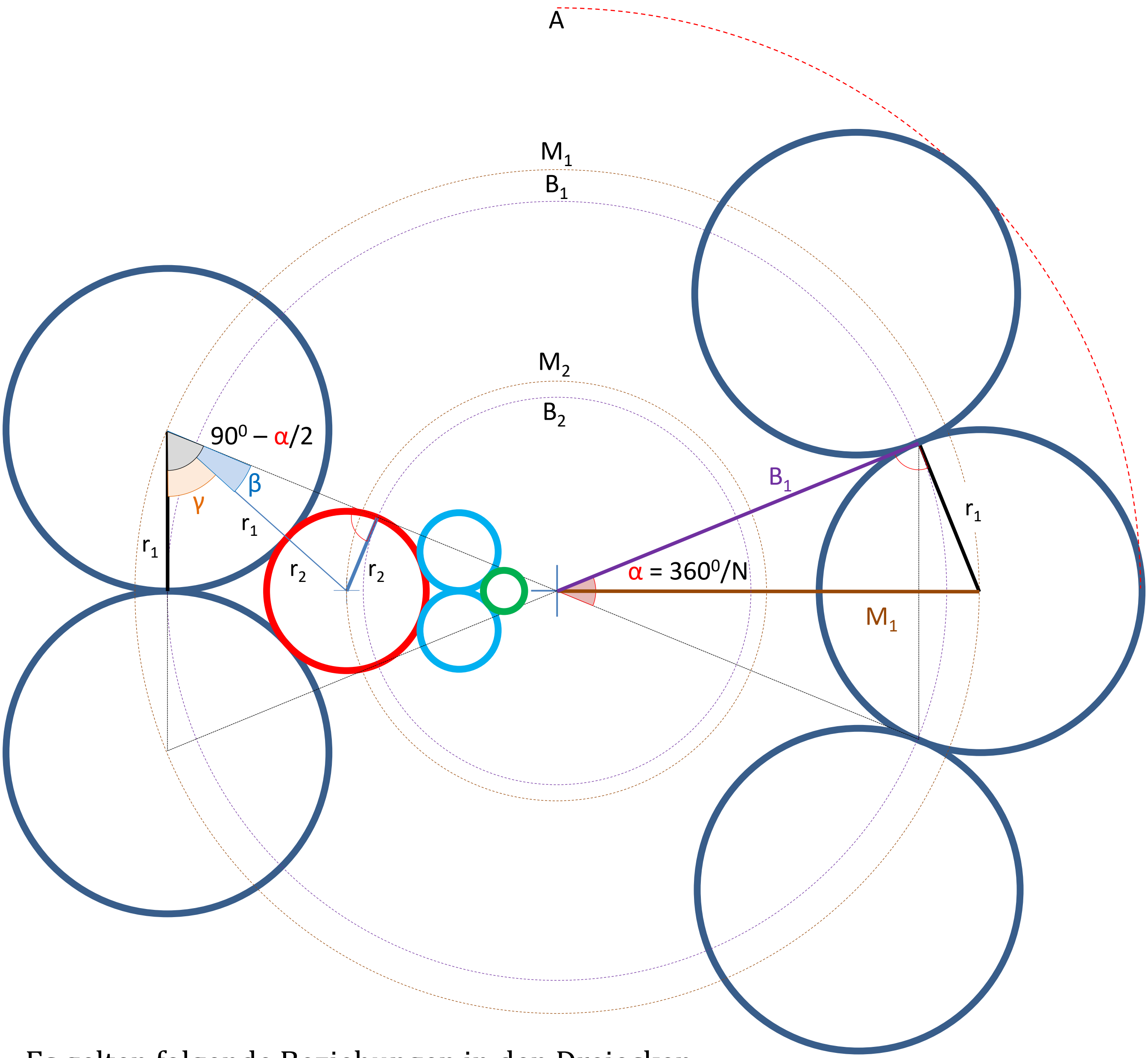
N = 21



Man kann den Wachstumsprozess der Samenkörner sehr schön nachvollziehen.

2. Kreise im Kreis - Geometrie

Die ersten N Kreise des Durchmessers $d_1 = 2\ r_1$ werden gleichmäßig in einem Kreis mit dem Außendurchmesser A angeordnet. Der Winkel $\alpha = 360^0/\ N$ bildet das Raster der Kreisschachtelung. Die ersten (**blauen**) Kreise bilden einen Kreis mit dem Mittendurchmesser M_1 und dem Berührungsdurchmesser B_1



Es gelten folgende Beziehungen in den Dreiecken:

$\sin \beta = r_{i+1}/(r_i+r_{i+1})$	(2.1a)	$M_i = 2\ r_i\ /\ \sin(\alpha/2)$	(2.2a)
$\cos \gamma = r_i\ /(r_i+r_{i+1})$	(2.1b)	$B_i = 2\ r_i\ /\ \tan(\alpha/2)$	(2.2b)
$90^0 - \alpha/2 = \beta + \gamma$	(2.1c)	$A\ = M_1 + d_1$	(2.2c)
		$M_{i+1} = B_i - 2\ (r_i + r_{i+1})\ \sin \gamma$	(2.3)

Der Radius r_{i+1} des (zweiten roten) innenliegenden Kreises ergibt sich durch die Lösung des Gleichungssystem (2.1a – c).

2. Kreise im Kreis – Lösung

Lösen des Gleichungssystems 2.1 a … c

$$\sin \beta = \frac{r_{i+1}}{r_i + r_{i+1}} = \frac{r_{i+1}/\, r_i}{1 + r_{i+1}/\, r_i} = \frac{\Delta}{1+\Delta} \qquad \text{zur Abkürzung} \quad \Delta = \frac{r_{i+1}}{r_i} < 1$$

$$\cos \gamma = \frac{r_i}{r_i + r_{i+1}} = \frac{1}{1+\Delta}$$

$$\sin \beta = \Delta \cos \gamma \qquad (2.4)$$

$$90^0 - \alpha/2 = \beta + \gamma \qquad \text{umstellen nach } \gamma = 90^0 - \alpha/2 - \beta$$

$$\sin \beta = \Delta \cos\,[90^0 - \alpha/2 - \beta] \qquad \text{zur Abkürzung setze} \quad \alpha' = 90^0 - \alpha/2$$

$$\sin \beta = \Delta\,\{\cos \alpha' \cos \beta + \sin \alpha' \sin \beta\,\} \qquad \text{Additionstheorem}$$

$$\sin \beta = \Delta \cos \alpha' \cos \beta + \Delta \sin \alpha' \sin \beta \qquad \text{multiplizieren}$$

$$\sin \beta\,[\,1 - \Delta \sin \alpha'] = \cos \beta \;\; \Delta \cos \alpha' \qquad \text{trennen von sin; cos}$$

$$\sin^2 \beta\,[\,1 - \Delta \sin \alpha']^2 = \cos^2 \beta \;\; \Delta^2 \cos^2 \alpha' \qquad \text{quadrieren}$$

$$\sin^2 \beta\,[\,1 - \Delta \sin \alpha']^2 = (\,1 - \sin^2 \beta\,)\, \Delta^2 \cos^2 \alpha' \qquad \text{cos umwandeln in sin}$$

$$\sin^2 \beta\,\{\,[\,1 - \Delta \sin \alpha']^2 + \Delta^2 \cos^2 \alpha'\,\} = \Delta^2 \cos^2 \alpha' \qquad \sin^2 \beta \text{ nach links}$$

$$\frac{\cancel{(\,\Delta\,)^2}}{(1+\Delta)^2}\{\,[\,1 - \Delta \sin \alpha']^2 + \Delta^2 \cos^2 \alpha'\,\} = \cancel{\Delta^2} \cos^2 \alpha' \qquad \sin^2 \beta \text{ einsetzen}$$

$$\{\,[\,1 - \Delta \sin \alpha']^2 + \Delta^2 \cos^2 \alpha'\,\} = (1+\Delta)^2 \cos^2 \alpha' \qquad \text{Nenner nach rechts}$$

$$\{\,[\,1 - \Delta \sin \alpha']^2 + \Delta^2 \cos^2 \alpha'\,\} = (1 + 2\Delta + \Delta^2\,) \cos^2 \alpha' \qquad \text{ausmultiplizieren}$$

$$[\,1 - \Delta \sin \alpha']^2 \cancel{+ \Delta^2 \cos^2 \alpha'} = \cos^2 \alpha' + 2\Delta \cos^2 \alpha' \cancel{+ \Delta^2 \cos^2 \alpha'}$$

$$[\,1 - 2\,\Delta \sin \alpha' + \Delta^2 \sin^2 \alpha'\,] = \cos^2 \alpha' + 2\Delta \cos^2 \alpha'$$

$$[\,1 - 2\,\Delta \sin \alpha' - 2\Delta \cos^2 \alpha' + \Delta^2 \sin^2 \alpha'\,] = \cos^2 \alpha' \qquad \text{quadr. Gleichung}$$

2. Kreise im Kreis - Lösung

$$[\, 1 - 2\,\Delta \sin\alpha' - 2\Delta\cos^2\alpha' + \Delta^2\sin^2\alpha' \,] = \cos^2\alpha' \qquad \text{geteilt durch } \sin^2\alpha'$$

$$\Delta^2 - 2\,\Delta\,\frac{\sin\alpha' + \cos^2\alpha'}{\sin^2\alpha'} + 1/\sin^2\alpha' + \{...\}^2 = \frac{\cos^2\alpha'}{\sin^2\alpha'} + \{...\}^2$$

$$\Delta - \left\{\frac{\sin\alpha' + \cos^2\alpha'}{\sin^2\alpha'}\right\} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha'}{\sin^2\alpha'} + \{...\}^2 - 1/\sin^2\alpha'} = \sqrt{\frac{\cancel{1} - \sin^2\alpha' - \cancel{1}}{\sin^2\alpha'} + \{...\}^2}$$

Somit ergeben sich die zwei Lösungen der quadratischen Gleichung wie folgt

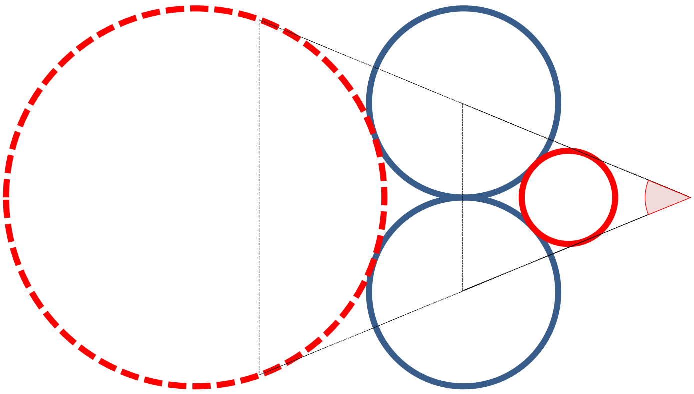
$$\Delta_{1,2} = \{...\} \pm \sqrt{\{...\}^2 - 1}$$

$$\alpha' = 90^0 - \alpha/2 \quad \text{in Radiant} \quad \alpha' = \pi/2 - \alpha/2 = \pi/2 - 2\pi/N\,/2 = \pi/2 - \pi/N$$

$$\{...\} = \frac{\sin\alpha' + \cos^2\alpha'}{\sin^2\alpha'}$$

Diese zwei Lösungen beschreiben den „inneren und den äußeren" (roten) Kreis an den ursprünglichen (blauen) Kreisen.

$$\boxed{\Delta_{1,2} = \left\{\frac{\sin(90^0 - \alpha/2) + \cos^2(90^0 - \alpha/2)}{\sin^2(90^0 - \alpha/2)}\right\} \pm \sqrt{\{...\}^2 - 1}} \tag{2.5}$$



Nebenbei: $$\boxed{\Delta_{i+1} = \frac{1}{\Delta_i}} \tag{2.6}$$

denn mit: $\Delta_{i,i+1} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ einsetzen $x - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

gilt für alle x $\quad x^2 - (x^2 - 1) = 1$

2. Kreise im Kreis – der Kreisfaktor

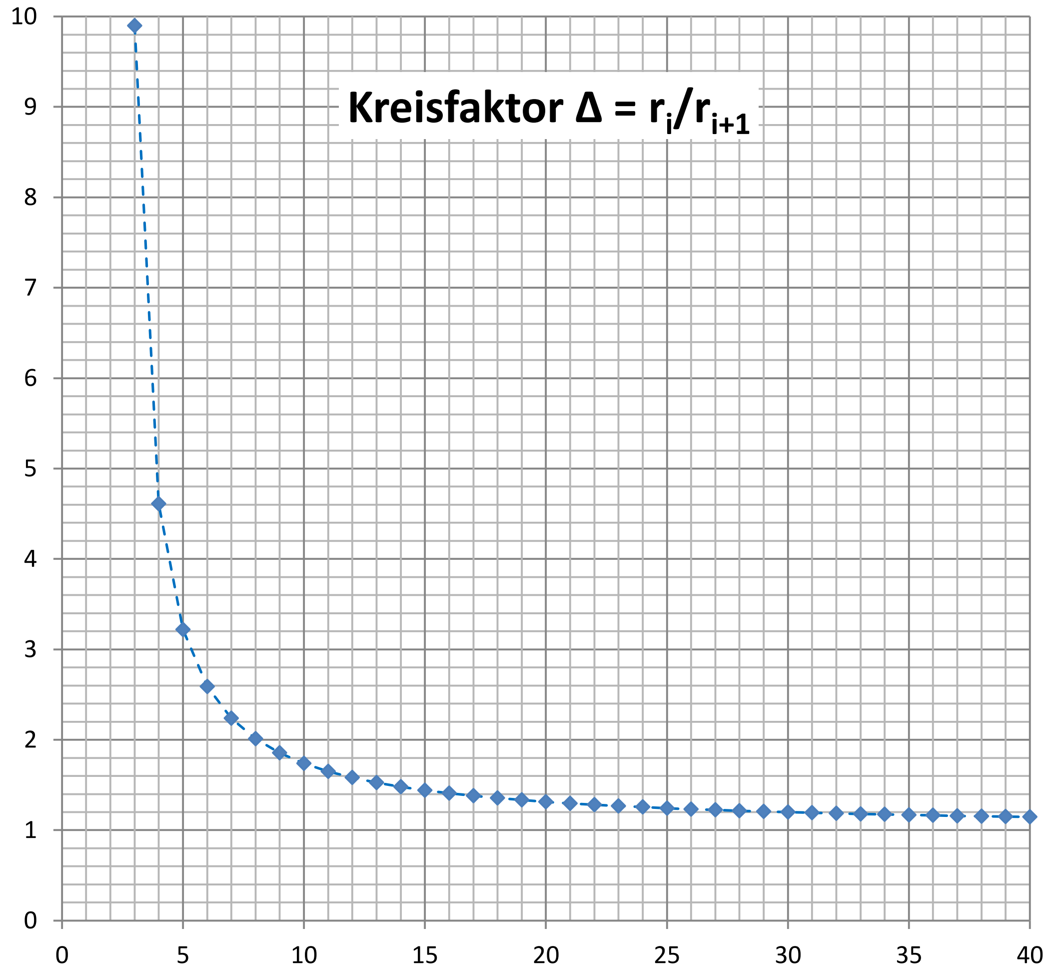
Definiert man den Kreisfaktor als Verhältnis zwischen dem größeren (äußeren) Kreis zum nächstliegenden kleineren (inneren) Kreis als

$$\Delta_i = \frac{r_i}{r_{i+1}}$$

so erhält man folgende Tabelle/ Graphik für die unterschiedlichen N Kreise

Anzahl N	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Δ_i	9,89898	3,21702	2,01056	1,52609	1,29704	1,17383	1,10405	1,06306	1,03851

Für die minimale Anzahl von drei Kreisen erhält man als Kreisfaktor den Wert
$\Delta_i = 5 \pm \sqrt{(5)^2 - 1} = 9{,}89898\ldots$ bzw. $\Delta_{i+1} = 0{,}10102\ldots$



Der Wert für große N strebt logischerweise gegen 1, da der Außenkreis immer größer wird und sich für $N >>> \infty$ einer Geraden annähert.

Anhang – Kubische Gleichung

Allgemeine Form der Kubischen Gleichung in x

$$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0} \qquad \text{Kubische Gleichung – (A0)}$$

Das Lösungsverfahren benötigt mehrere Schritte:

1. Kubische Ergänzung

   Auf der Basis der binomischen Formeln gilt

   $(3ax + b)^3 = 27\,a^3x^3 + 27\,a^2x^2 + 9ab^2x + b^3$ sog. kubische Ergänzung

   deshalb wird die Originalgleichung zuerst einmal mit $27a^2$ multipliziert

   $27\,a^3x^3 + 27a^2bx^2 + 27a^2cx + 27a^2d = 0$ trennen

   $27\,a^3x^3 + 27a^2bx^2 = -\,27a^2cx - 27a^2d$ kubische Ergänzung addieren

   $27\,a^3x^3 + 27a^2bx^2 + 9ab^2x + b^3 = -\,27a^2cx - 27a^2d + 9ab^2x + b^3$

   $(3ax + b)^3 = \underline{9ab^2x} + b^3 \underline{-\,27a^2}cx - 27a^2d$ ausklammern

   $= 3\,(b^2 - 3ac)3ax + b^3 - 27a^2d$ womit sich ergibt

   $(3ax + b)^3 + 3\,(3ac - b^2)3ax + 27a^2d - b^3 = 0$ neue Form der KG

2. Substitution von $3ax + b = y$

   $y^3 + 3(3ac - b^2)(y - b) + 27a^2d - b^3 = 0$

   $y^3 + 3\underbrace{(3ac - b^2)}_{p}y + \underbrace{27a^2d - 9abc + 2b^3}_{q} = 0$ Abkürzungen p und q

   ergibt sich die reduzierte kubische Gleichung ohne quadratisches Glied.

$$\boxed{y^3 + 3py + q = 0} \qquad \text{reduzierte kubische Gleichung – (A1)}$$

3. Lösungsansatz mit den zwei Kubikwurzeln $y = u + v$

   $(u + v)^3 = -\,3p\,(u + v) - q$ binomische Formel ausmultiplizieren

   $(u^2+2uv+v^2)(u+v) = u^3+\underline{2u^2v}+\underline{uv^2} + \underline{u^2v}+\underline{2uv^2}+v^3 = -\,3p\,(u + v) - q$

   $u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = -\,3p\,(u + v) - q$ sortieren führt zu

   $\underline{u^3 + v^3} + 3(u+v)(\underline{uv}+p) + \underline{q} = 0$

Koeffizientenvergleich führt zu den Bestimmungsgleichungen für die Nullstellen u bzw. v des neuen Gleichungssystem

$u^3 + v^3 = -q$ bzw. $uv = -p$

4. Lösung des Gleichungssystems für u und v

Für eine quadratische Gleichung seien z_1 und z_2 die zwei Nullstellen von

$z^2 + sz + t = 0$ so gilt gemäß dem Satz von Vieta

$z_1 + z_2 = -s$ und $z_1 z_2 = t$

Vergleich dieser Gleichungen führt zu $z_1 = u^3$ und $z_2 = v^3$ damit dann

$-s = z_1 + z_2 = u^3 + v^3 = -q$ und $z_1 z_2 = u^3 v^3 = (-p)^3$

somit Reduktion der Nullstellen auf die neue quadratische Gleichung

$z^2 + qz - p^3 = 0$

Diese quadratische Gleichung hat mit der bekannten quadratischen Ergänzung folgende zwei Lösungen

$$\boxed{z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3}\right)} \tag{A2}$$

und wegen $z_1 = u^3$ und $z_2 = v^3$ ergeben sich die Lösungen in u und v aus der dritten Kubikwurzel von

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4q + 4\sqrt{q^2 + 4p^3}} \qquad v = \frac{1}{2}\sqrt[3]{-4q - 4\sqrt{q^2 + 4p^3}}} \tag{A3}$$

Wegen $y = u + v$ ergibt sich die erste Lösung der kubischen Gleichung zu

$$\boxed{y_1 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{-4q + 4\sqrt{q^2 + 4p^3}} + \sqrt[3]{-4q - 4\sqrt{q^2 + 4p^3}}\right\}} \tag{A4}$$

wobei man noch eine weitere Rücksubstitution nach x vornehmen muss

$$\boxed{x_1 = \frac{y_1 - b}{3a}} \quad \text{Lösung mit} \quad \begin{aligned} p &= 3ac - b^2 \\ q &= 27a^2d - 9abc + 2b^3 \end{aligned} \tag{A5}$$

$$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0} \quad \text{der allgemeinen kubischen Gleichung}$$

Für den Fall einer negativen Diskriminante $q^2 + 4p^3 < 0$ werden die Lösungen z zu komplexen Zahlen. Da q^2 immer positiv ist, muss $p <$ negativ sein. Deshalb

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\,(-q \pm i\sqrt{-q^2 - 4p^3}\,) \qquad \text{aus A2}$$

Die beiden Lösungen sind konjugiert komplex und können in Polarkoordinaten mit Betrag und komplexem Argument in ϑ dargestellt werden.
Der Betrag ergibt sich aus

$$|z_1|^2 = Re^2(z_1) + Im^2(z_1) = (-q/2)^2 + (-q^2 - 4p^3)/4 = -p^3$$

$$|z_1| = \sqrt{-p^3}$$

Der Hilfswinkel Theta ϑ ergibt sich mit dem Cosinussatz zu

$$\cos\vartheta = \frac{Re(z_1)}{|z_1|} = (-q/2)\,/\,\sqrt{-p^3} \quad >>> \quad \boxed{\vartheta = \arccos\left[\frac{-q}{2\sqrt{-p^3}}\right]} \qquad (A6)$$

Damit ergibt sich für die komplexen Lösungen in z

$$z_1 = \sqrt{-p^3}\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad z_2 = \sqrt{-p^3}\,(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$$

Die Lösungen in u,v ergeben sich aus der dritten komplexen Wurzel zu

$$u = \sqrt{-p}\,(\cos\vartheta/3 + i\sin\vartheta/3) \qquad v = \sqrt{-p}\,(\cos\vartheta/3 - i\sin\vartheta/3)$$

Die Summe beider Lösungen ergibt die reelle Größe in $y = u + v$

$$\boxed{y_1 = 2\sqrt{-p}\,\cos\vartheta/3} \qquad \boxed{y_{2,3} = -2\sqrt{-p}\,\cos[\vartheta/3 \pm \pi/3]} \qquad (A7)$$

Die in bekannter Weise noch durch $x_i = (y_i - b)/(3a)$ gemäß A5 als Lösung der ursprünglichen kubischen Gleichung dargestellt werden muss.

<u>Beispiel</u>: $\Phi^3 - 2\Phi - 1 = 0$

d.h. $a = 1$ $\quad b = 0$ $\quad c = -2$ $\quad d = -1$

und $p = -6$ $\quad q = -27$

Determinante $q^2+4p^3 = 729 - 864 < 0$

Winkel $\vartheta = \arccos(27/(2\sqrt{216}) = 23{,}283\,732$ Grad

$y_1 = \sqrt{6}\;2\cos\Theta/3 = 4{,}854\,102$ $\qquad y_2 = -1{,}854\,102$ $\qquad y_3 = -3$

somit $x_1 = 1{,}618\,034\ldots$ $\qquad x_2 = -0{,}618\,034$ $\qquad x_3 = -1$

Anhang – Literaturübersicht

	Literatur	Hinweise
[1]	Wolfram MathWorld, Golden Ratio http://functions.wolfram.com/Constants/GoldenRatio/	Eine Übersicht über den „Goldenen Schnitt“
[2]	Fibonacci-Zahlen by Michael Becker www.ijon.de	Eine detaillierte Zusammenfassung
[3]	Die Online Enzyklopädie der Zahlenfolgen http://oeis.org/A001622	100 Fibonacci Zahlen und weitere Literatur
[4]	Kubische Gleichungen http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/kubisch.html	

1. Text

Arial		13 pt		Zeilenabstand genau 10 pt			
Alpha	α	Beta	β	Delta	Δ - δ	Epsilon	ε
Theta	Θ – ϑ – θ – ϴ			Phi	Φ – ϕ – φ		
Pi	¶ – Π – π			Omega	Ω – ω		
Integral	∫	Wurzel	√	Summe	∑	Betrag	± | ∞ |

Beispiel $x_i = \sum_{0}^{i=99} n_i \frac{n_{i+1}}{(n_i)^2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sqrt{3 y^2 +4}$

Calibri		14 pt		Zeilenabstand genau 10 pt			
Alpha	α	Beta	β	Delta	Δ - δ	Epsilon	ε
Theta	Θ – ϑ – θ – ϴ			Phi	Φ – φ – ϕ		
Pi	¶ – Π – π			Omega	Ω – ω		
Integral	∫	Wurzel	√	Summe	∑	Betrag	± | ∞ |

Beispiel $x_i = \sum_{0}^{i=99} n_i \frac{n_{i+1}}{(n_i)^2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sqrt{3 y^2 +4}$

Comic Sans MS		12 pt		Zeilenabstand genau 10 pt			
Alpha	α	Beta	β	Delta	Δ - δ	Epsilon	ε
Theta	Θ - ϑ - θ - θ			Phi	Φ - ϕ - φ		
Pi	¶ - Π - π			Omega	Ω - ω		
Integral	∫	Wurzel	√	Summe	∑	Betrag	± | ∞ |

Beispiel $x_i = \sum_{0}^{i=99} n_i \frac{n_{i+1}}{(n_i)^2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sqrt{3 y^2 +4}$

Cambria Math		14 pt		Zeilenabstand genau 10 pt			
Alpha	α	Beta	β	Delta	Δ - δ	Epsilon	ε
Theta	Θ – ϑ – θ – ϴ			Phi	Φ – ϕ – φ		
Pi	¶ – Π – π			Omega	Ω – ω		
Integral	∫	Wurzel	√	Summe	∑	Betrag	± | ∞ |

Beispiel $x_i = \sum_{0}^{i=99} n_i \frac{n_{i+1}}{(n_i)^2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sqrt{3 y^2 +4}$