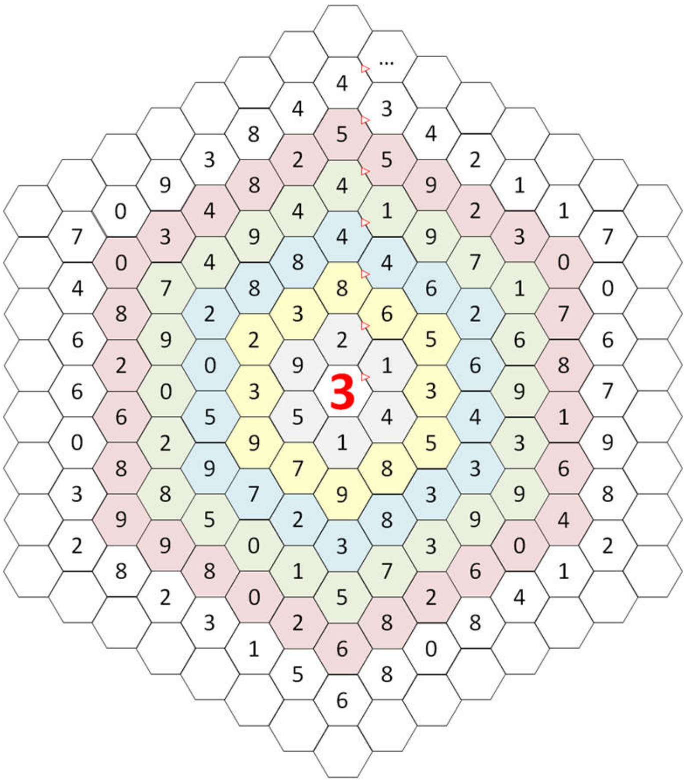


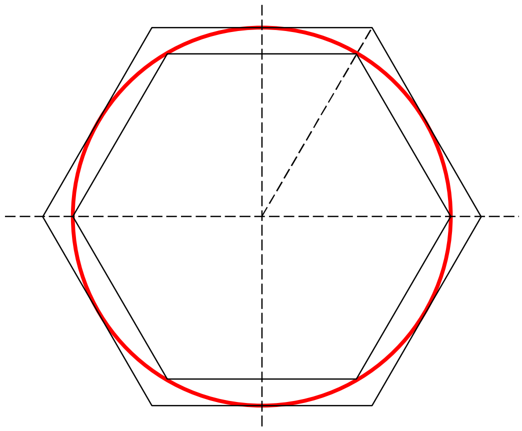
π Geometrie

1. Grundlagen der Mittelwertbildung
2. Quadrate, Sechsecke , Achtecke und 2^N-Ecke
3. Anwendung des Pythagoras
4. Geometrische Darstellungen

Autor:
Michael Bischoff, Parkstr. 49, D-89250 Senden

Kap. I: Grundlagen der Mittelwert Bildung

Versucht man die Kreiszahl Pi durch geometrische Lösungen/ diverse Polygone zu gewinnen wie es im Bild beispielhaft für ein Sechseck dargestellt wird



So ergeben sich immer zwei mögliche Annäherungen.

1. Die „Innere" einbeschriebene Lösung des sechseckigen Umfanges und
2. Die „Äußere" umschreibende Lösung der Kantenlänge des Sechsecks.

Die innere Lösung ist zu klein und die äußere Lösung wird zu groß.

Neben dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a + b)$ und
dem geometrischen Mittel $\sqrt{a\,b}$

hat sich das sogenannte Arithmetisch Geometrische Mittel AGM als sehr gute Näherung in der folgenden Form erwiesen.

Initialisiere: $a_0 = a$

$b_0 = b$

Iteriere: für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} \tag{I.1}$$

$$b_{k+1} = \sqrt{a_k\, b_k} \tag{I.2}$$

Dann konvergieren beide Werte a_k und b_k zum Grenzwert $AGM(a_k, b_k)$

Die Hilfsgröße c

$$c_{k+1} = \frac{a_k - b_k}{2} \tag{I.3a}$$

konvergiert somit gegen null. Außerdem erhält mit b_k durch auflösen von I.1 und einsetzen in I.3a

$$(c_{k+1})^2 = (a_{k+1} - a_k)^2$$

$(c_{k+1})^2 = \frac{1}{4}\,[a_k^2 - 2a_k b_k + b_k^2]$

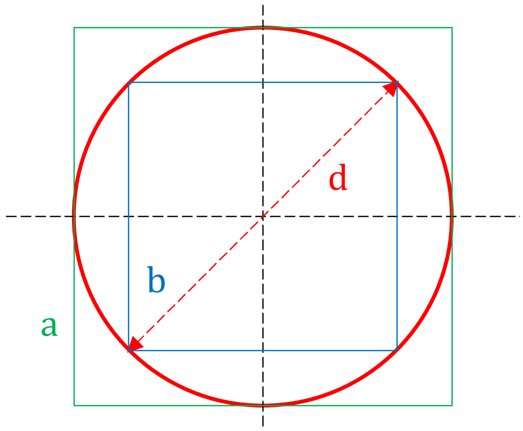
mit $b_k = 2\,a_{k+1} - a_k$

folgt $= \frac{1}{4}\,[a_k^2 - 2a_k(2\,a_{k+1} - a_k) + (2\,a_{k+1} - a_k)^2]$

$= \frac{1}{4}\,[a_k^2 - 4a_k\,a_{k+1} + 2a_k^2 + 4\,a_{k+1}^2 - 4a_k\,a_{k+1} + a_k^2]$

$= \frac{1}{4}\,4\,[a_k^2 - 2a_k\,a_{k+1} + a_{k+1}^2]$

Beginnen wir mit der Umfangsberechnung mit dem einfachsten Fall, des ein-/ umschrieben grünen/ blauen Quadrates



$(b/2)^2 + (b/2)^2 = (d/2)^2$
also
$b = d/\sqrt{2}$

Für das äußere grüne Quadrat gilt für den Umfang $U_a = 4\,a = 4\,d$
Für das innere blaue Quadrat gilt analog $U_b = 4\,b = 4\,d\,/\sqrt{2}$

Das AGM ergibt sich wie folgt und führt zu:

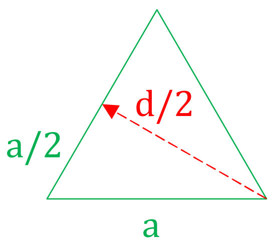
Quadrat			
a0	4		
b0	2,828427125		
k	ak	bk	$(ck)^2$
0	4,00000 00000 00000	2,82842 71247 46190	
1	3,41421 35623 73090	3,36358 56610 14860	0,34314 57505 07620
2	3,38889 96116 93980	3,38880 50669 87570	0,00064 07960 98985
3	3,38885 23393 40770	3,38885 23390 11060	0,00000 00022 34675
4	3,38885 23391 75920	3,38885 23391 75920	0,00000 00000 00000

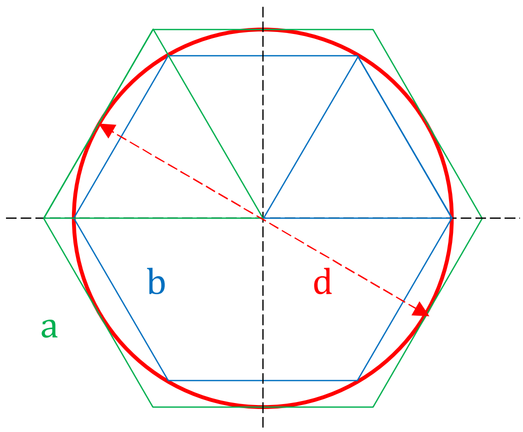
Somit ergibt sich aus dieser einfachen Näherung der Wert zu

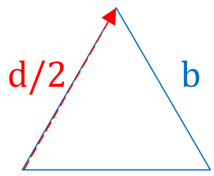
$$\pi = 3{,}38\ldots. \qquad \text{(II.1)}$$

Nicht sehr nahe - aber immerhin nach nur 4 Schritten ist der Grenzwert erreicht.

Ein grünes und blaues Sechseck in folgender Konfiguration ist der nächste Schritt der Näherungsrechnung.







$a^2 = (a/2)^2 + (d/2)^2$

$3/4\, a^2 = (d/2)^2$

also

$a = d/\sqrt{3}$

Für das äußere grüne Sechseck gilt für den Umfang $U_a = 6\,a = 6\,d\,/\,\sqrt{3}$

Für das innere blaue Sechseck gilt analog $U_b = 6\,b = 6\,d\,/\,2$

Das AGM ergibt sich wie folgt und führt zu:

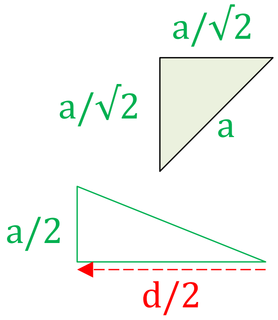
Sechseck			
a0	3,464101615		
b0	3		
k	ak	bk	(ck)²
0	3,46410 16151 37750	3,00000 00000 00000	
1	3,23205 08075 68880	3,22370 97954 70630	0,05384 75772 93368
2	3,22788 03015 19750	3,22787 76073 17000	0,00001 73931 20706
3	3,22787 89544 18380	3,22787 89544 18100	0,00000 00000 01815
4	3,22787 89544 18240	3,22787 89544 18240	0,00000 00000 00000

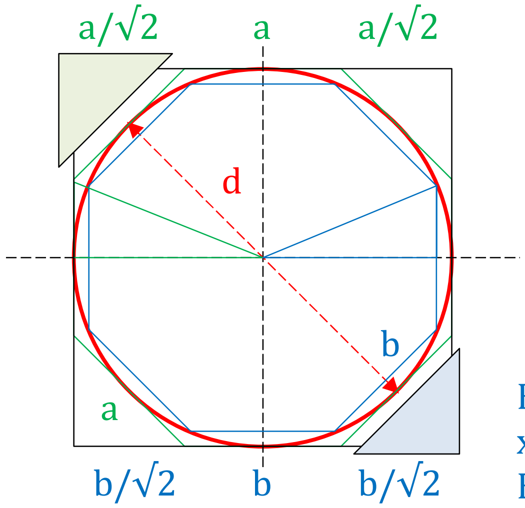
Somit ergibt sich aus dieser Näherung der Wert zu

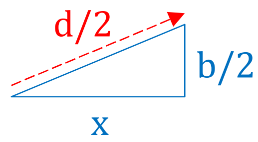
$$\pi = 3{,}22\ldots. \tag{II.2}$$

Besser - aber immer noch nicht gut genug.

Das grüne und blaue Achteck nähert den Umfang U etwas besser an.







Breite des Achteck

$d = a/\sqrt{2} + a + a/\sqrt{2}$

$d = a\,(1 + 2/\sqrt{2})$

$d = a\,(1 + \sqrt{2})$

somit

$a = d/\,(1 + \sqrt{2})$

Es gilt im Dreieck

$x^2 + (b/2)^2 = (d/2)^2$

Breite des Achteck

$2x\ = b/\sqrt{2} + b + b/\sqrt{2}$

$2x\ = b\,(1 + 2/\sqrt{2})$

$2x\ = b\,(1 + \sqrt{2})$

einsetzen in x^2 ergibt

$[b(1+\sqrt{2})/2]^2+(b/2)^2=(d/2)^2$

$b^2\,[1+2\sqrt{2}+2+1] = d^2$

$b^2\,[4+2\sqrt{2}] = d^2$

somit

$b = d\,/\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

Für das äußere grüne Achteck gilt für U $\qquad U_a = 8\,a = 8\,d/(1 + \sqrt{2})$

Für das innere blaue Achteck gilt analog $\qquad U_b = 8\,b = 8\,d/\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

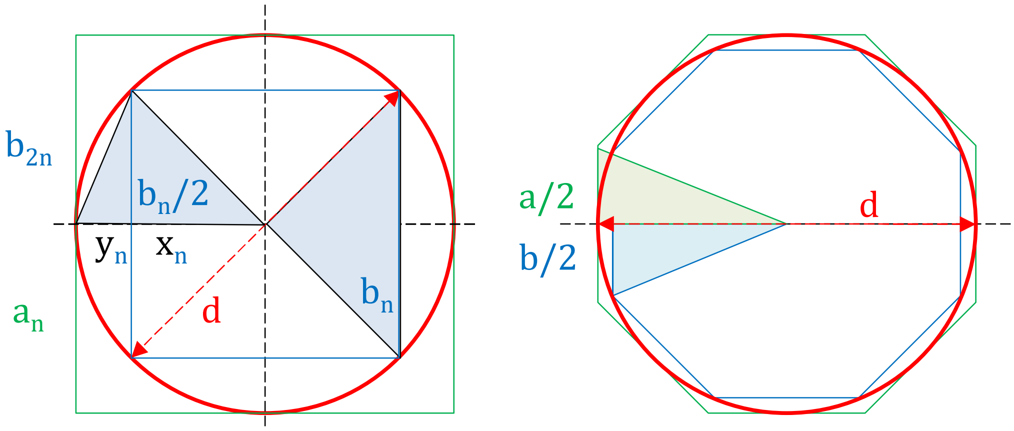
Das AGM ergibt sich wie folgt und führt zu:

Achteck			
a0	3,313708499		
b0	3,061467459		
k	**ak**	**bk**	**$(ck)^2$**
0	3,31370 84989 84760	3,06146 74589 20720	
1	3,18758 79789 52740	3,18509 19512 61510	0,01590 63855 73148
2	3,18633 99651 07130	3,18633 97206 98390	0,00000 15575 38559
3	3,18633 98429 02760	3,18633 98429 02760	0,00000 00000 00015
4	3,18633 98429 02760	3,18633 98429 02760	0,00000 00000 00000

Somit ergibt sich aus dieser Näherung der Wert zu

$$\pi = 3{,}18\ldots. \qquad \text{(II.3)}$$

Die Um-/ Inkreis 2^N-Ecke werden aus gleichschenkligen Dreiecken gebildet, die jeweils halbiert werden können. Dadurch ergeben sich rekursive Reihen für die Umfänge U_a/ U_b z.B. vom 4 -> 8-Eck oder vom 8-Eck -> 16-Eck



Mit dem Pythagoras im Dreieck b_{2n} und $b_n/2$ und y_n erhält man

$$(b_{2n})^2 = (b_n/2)^2 + (y_n)^2 \qquad \text{(II.4a)}$$

Zudem gilt im anderen Dreieck aus b_n und x_n und dem halben Durchmesser

$$(d/2)^2 = (b_n/2)^2 + (x_n)^2 \qquad \text{(II.4b)}$$

Und zudem gilt

$$y_n + x_n = d/2 \qquad \text{(II.4c)}$$

Umstellen von II.4c nach y_n und quadrieren ergibt

$$(y_n)^2 = + x_n = (\, d/2 - x_n \,)^2 = (d/2)^2 - 2\,(d/2)\,x_n + (x_n)^2$$

Einsetzen in II.4a

$$(b_{2n})^2 = (b_n/2)^2 + (d/2)^2 - 2\,(d/2)\,x_n + (x_n)^2$$

Gl. II.4b auflösen nach x_n

$$(x_n)^2 = (d/2)^2 - (b_n/2)^2 \qquad \text{somit} \qquad x_n = \sqrt{(d/2)^2 - (b_n/2)^2}$$

Das Ergebnis in II.4a einsetzen

$$(b_{2n})^2 = \cancel{(b_n/2)^2} + 2(d/2)^2 - 2\,(d/2)\sqrt{(d/2)^2 - (b_n/2)^2} + \cancel{(d/2)^2} - \cancel{(b_n/2)^2}$$

Somit die Rekursionsformel für b_{2n}

$$(b_{2n})^2 = 2(d/2)^2 - 2\,(d/2)\sqrt{(d/2)^2 - (b_n/2)^2}$$

Ausklammern von d/2 ergibt

$$(b_{2n})^2 = 2(d/2)^2 - 2\,(d/2)\,(d/2)\sqrt{1 - (b_n/d)^2}$$

Und d nach „links“ bringen führt zur endgültigen Form

$$\boxed{(b_{2n}/d)^2 = \frac{1}{2}\left[\,1 - \sqrt{1 - (b_n/d)^2}\,\right]} \qquad \text{(II.4d)}$$

Beispiel:

vom Quadrat zum Achteck mit $b_n/d = 1/\sqrt{2}$ führt zu $b_{2n}/d = 0{,}382\,683$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke kann eine Beziehung für a_n abgeleitet werden, denn es gilt

$$(d/2)/\, x_n = a_n/\, b_n$$

Somit folgt direkt der Wert für das äußere N-Eck a_n

$$a_n = (d/2)\, b_n /\, x_n = \frac{d}{2} \frac{b_n}{\sqrt{(d/2)^2 - (b_n/2)^2}}$$

Auch hier ausklammern von d/2

$$a_n = \frac{d}{2} \frac{b_n}{(d/2)\sqrt{(1 - (b_n/d)^2}}$$

Und auch hier d nach „links“ führt zu

$$\boxed{(a_n/d) = \frac{b_n/d}{\sqrt{(1 - (b_n/d)^2}}} \qquad \text{(II.4e)}$$

Beispiel:

Im Viereck ergibt sich mit $b_n/d = 1/\sqrt{2}$ die äußere Seite zu $a_n/d = 1$

Der äußere bzw. innere Umfang der 2^N-Ecke ergibt sich dann mit $n=2^N$ zu

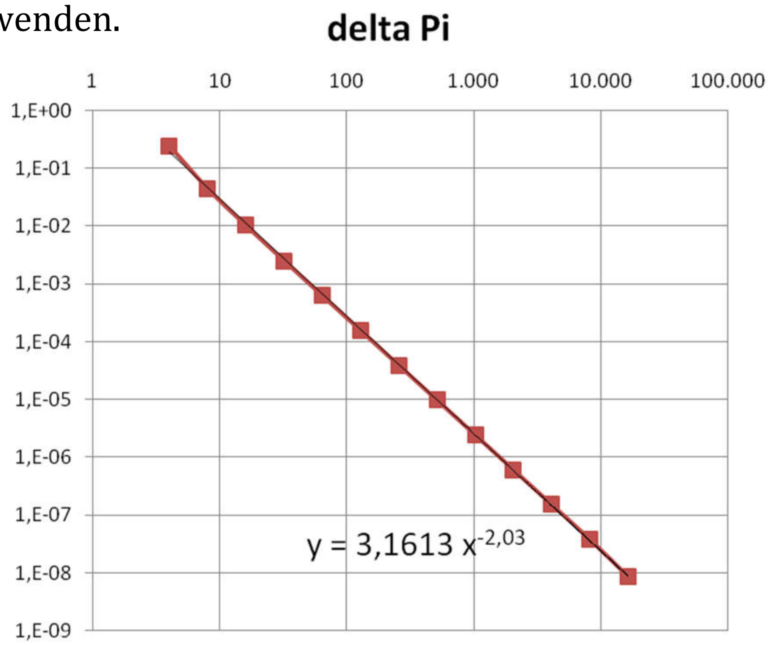
$$U_{an} = n\, a_n \quad \text{„außen“} \qquad \text{(II.4f)}$$

$$U_{bn} = n\, b_n \quad \text{„innen“} \qquad \text{(II.4g)}$$

Beispiele:

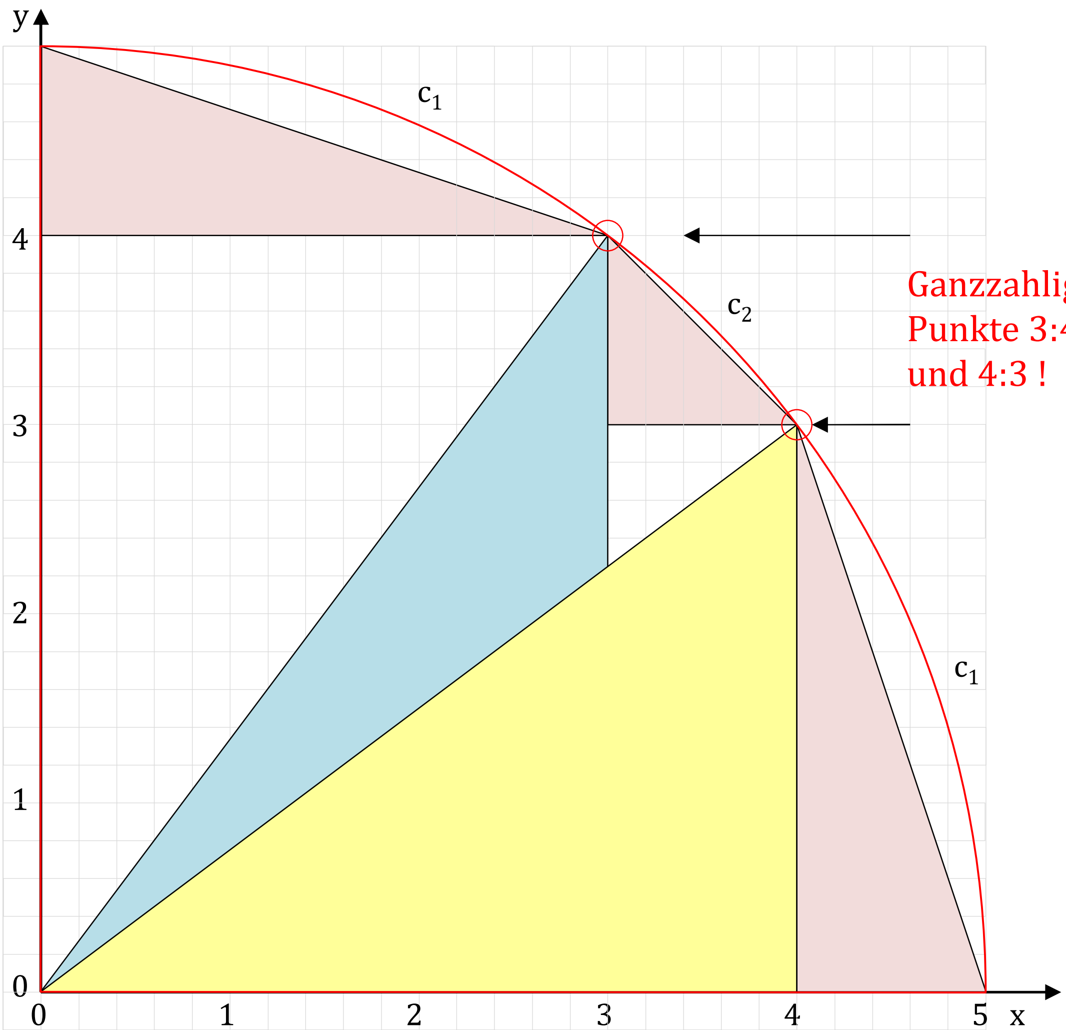
Zur Bestimmung von m π Stellen muss man ein m/2-Eck berechnen und darauf dann noch die AGM Mittelung anwenden.

N-Eck	delta Pi	Stellen
4	0,24725 96857 50977	0
8	0,04474 71893 12966	1
16	0,01035 47074 61577	1
32	0,00253 94669 54048	2
64	0,00063 18322 21021	3
128	0,00015 77690 30643	3
256	0,00003 94304 53322	4
512	0,00000 98568 76553	4
1024	0,00000 24641 75644	5
2048	0,00000 06160 33765	6
4096	0,00000 01540 50862	6
8192	0,00000 00384 62596	6
16384	0,00000 00087 50301	8



n.b. : man kann als Startwert auch das Sechseck nehmen, ist eine Spur besser

Schon die alten Babylonier und Pharaonen kannten den Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2$



Die rosa Dreiecke mit den Hypotenusen c_1 – c_2 und c_1 bilden den Innenkreis mit ausreichender Genauigkeit ab. Ein Viertel des Kreises hat die Länge

$$U/4 = c_1 + c_2 + c_1$$

Dabei gilt

$$(c_1)^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$
$$(c_2)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

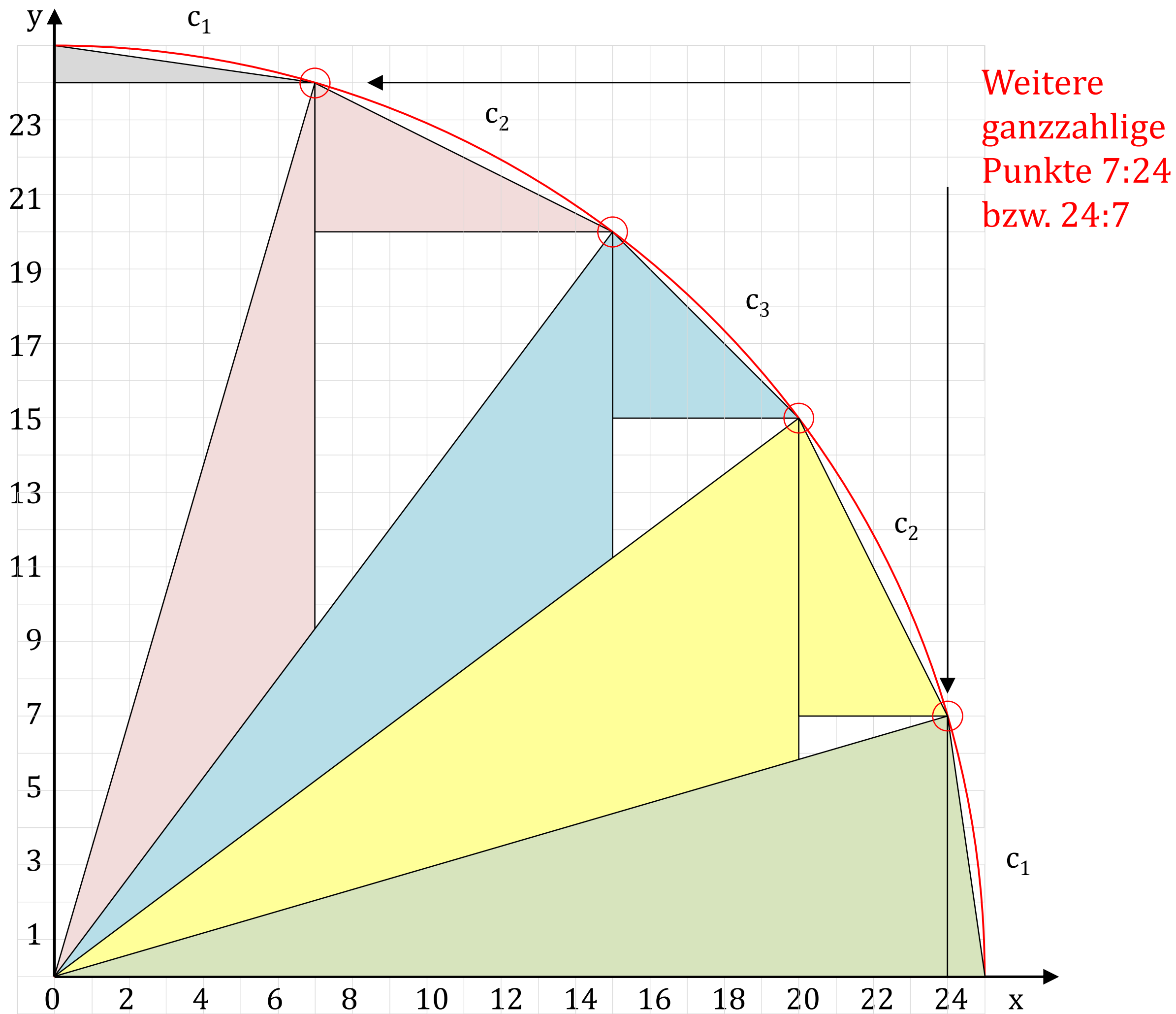
Also

$$U/4 = \sqrt{10} + \sqrt{2} + \sqrt{10}$$
$$U = 4\,(\,2\sqrt{10} + \sqrt{2}\,)$$

Normiert auf den Kreisdurchmesser $d = 10$

$$U/d = \frac{4}{10}\,(\,2\sqrt{10} + \sqrt{2}\,)$$
$$U/d = 3{,}095$$

Vergrößert man den Radius des Kreises um den Faktor 5 so ergibt sich r = 25



Die Dreiecke mit den Diagonalen $c_1 - c_2$ und c_3 bilden den Innenkreis ab, mit

$$U/4 = c_1 + c_2 + c_3 + c_2 + c_1$$

Dabei gilt

$$(c_1)^2 = 1^2 + 7^2 = 50 = 5 \text{ x } 2\text{x}5$$

$$(c_2)^2 = 8^2 + 4^2 = 80 = 2\text{x}2\text{x}2 \text{ x } 2\text{x}5$$

$$(c_3)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

Also

$$U/4 = \sqrt{50} + \sqrt{80} + \sqrt{50} + \sqrt{80} + \sqrt{50}$$

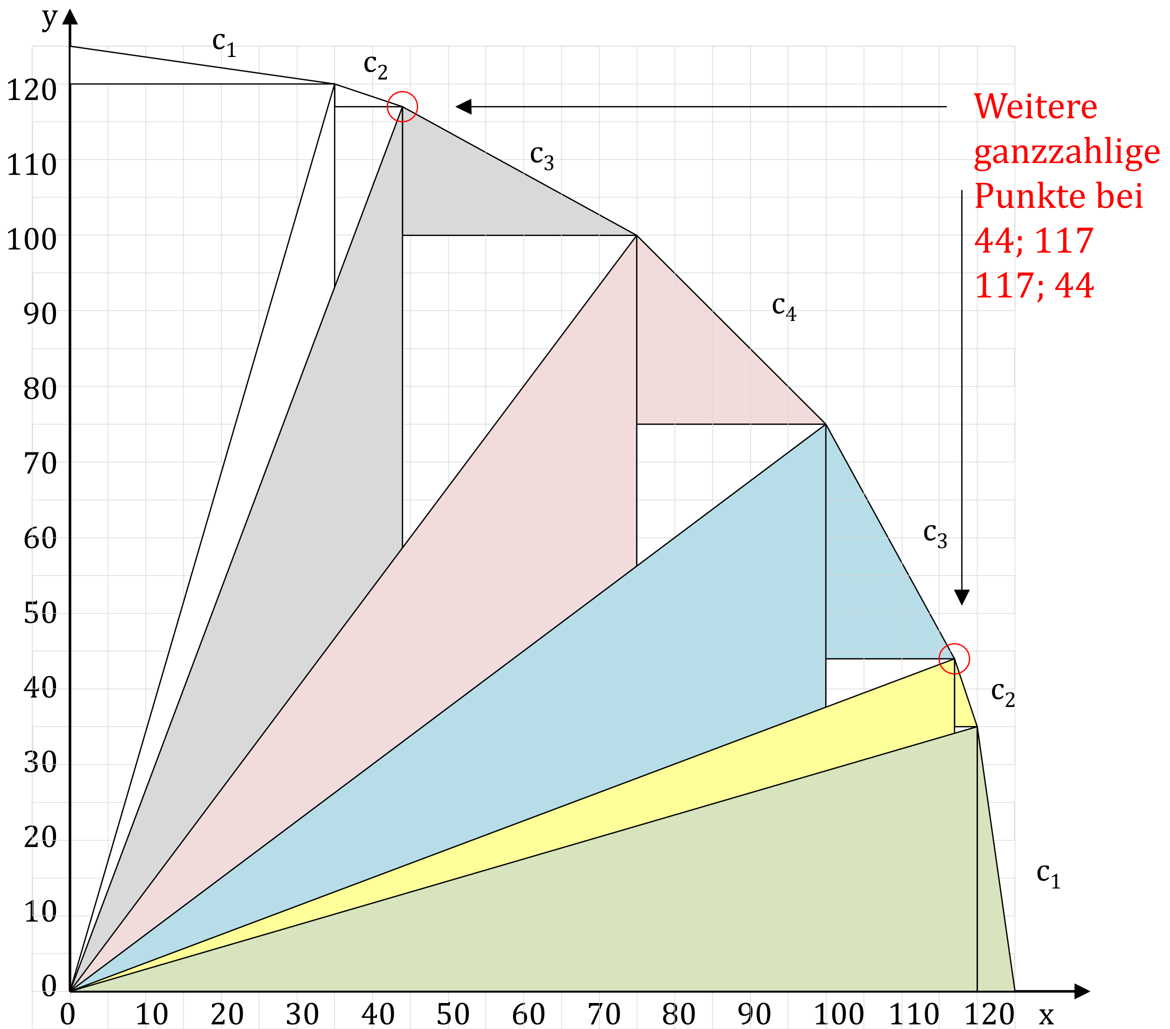
$$U = 4\,(\,3\sqrt{50} + 2\sqrt{80}\,) = 4\,(\,3\text{x}5\,\sqrt{2} + 2\text{x}2\text{x}2\text{x}\,\sqrt{5}\,)$$

Normiert auf den Kreisdurchmesser d = 50

$$U/d = \frac{4}{50}\,(\,3\text{x}5\,\sqrt{2} + 2\text{x}2\text{x}2\,\sqrt{5}\,)$$

$$U/d = 3{,}128$$

Weitere Vergrößerung um den Faktor 5 ergibt folgendes Bild für r=125



Die Dreiecke mit den Diagonalen $c_1 - c_2 - c_3$ und c_4 bilden den Innenkreis ab, mit

$$U/4 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1$$

Dabei gilt

$$(c_1)^2 = 35^2 + 5^2 = 1250 \qquad = 5x5x5 \text{ x } 2x5$$
$$(c_2)^2 = 9^2 + 3^2 = 90 \qquad = 3x3 \text{ x } 2x5$$
$$(c_3)^2 = 31^2 + 17^2 = 1250$$
$$(c_4)^2 = 25^2 + 25^2 = 1250$$

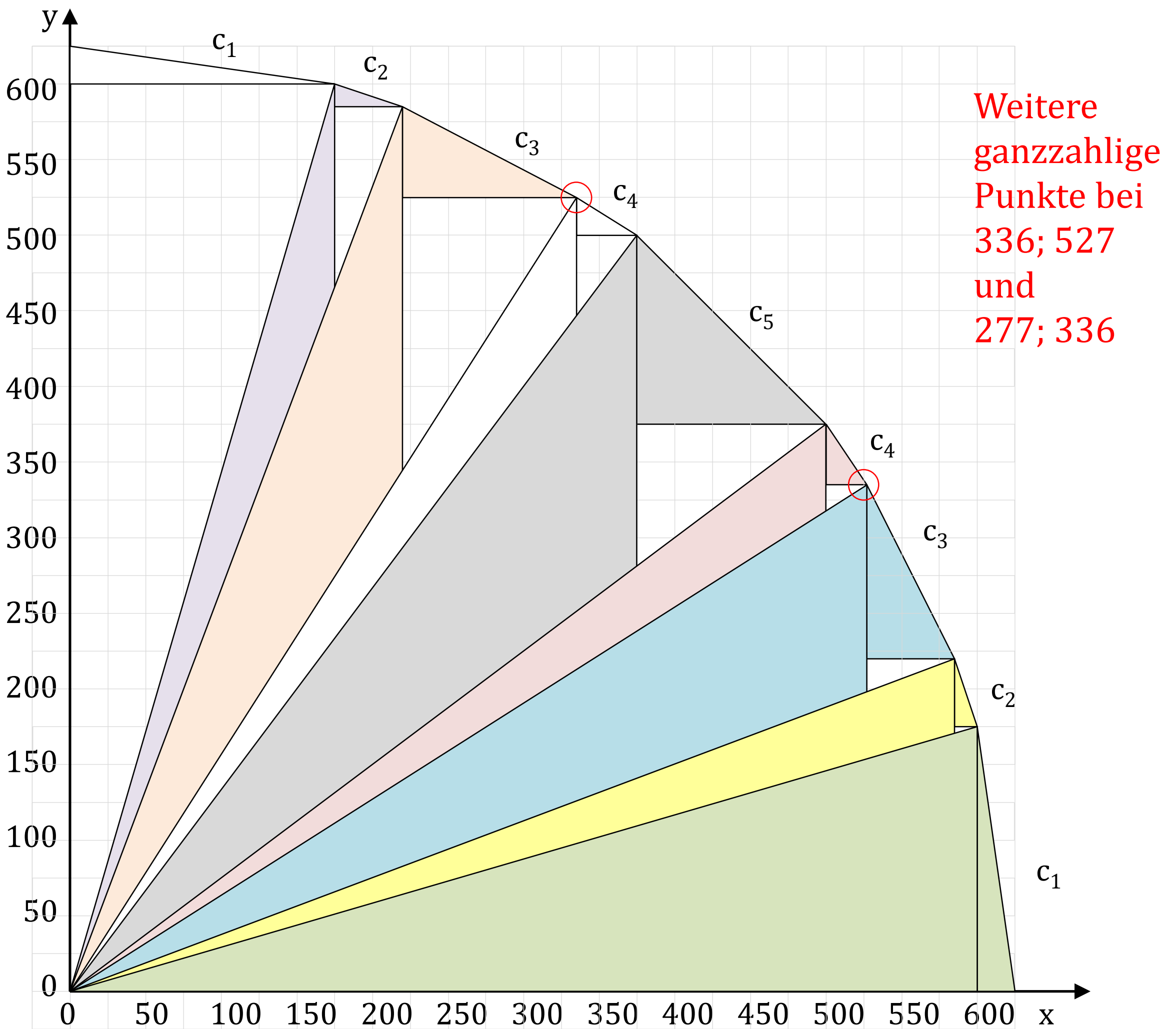
Also

$$U/4 = \sqrt{1250} + \sqrt{90} + \sqrt{1250} + \sqrt{1250} + \sqrt{1250} + \sqrt{90} + \sqrt{1250}$$
$$U = 4\ (\ 5\sqrt{1250} + 2\sqrt{90}\ ) = 4\ (\ 5x5x5\ \sqrt{2} + 2x3\ \sqrt{(2x5)}\ )$$

Normiert auf den Kreisdurchmesser d = 250

$$U/d = \frac{4}{250}\ (\ 5x5x5\ \sqrt{2} + 2x3\ \sqrt{(2x5)}\ )$$
$$U/d = 3{,}132$$

Die weitere Vergrößerung des Radius auf r=625 ergibt weitere ganze Zahlen.



Die Dreiecke mit den Diagonalen $c_1 - c_5$ bilden den Innenkreis ab, mit

$$U/4 = 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2c_4 + c_5$$

Dabei gilt

$$(c_1)^2 = 175^2 + 25^2 = 31250 \quad = 5x5x5x5x5 \text{ x } 2x5$$
$$(c_2)^2 = 45^2 + 15^2 = 2250 \quad = 2 \text{ x } 5x5x5 \text{ x } 2x5$$
$$(c_3)^2 = 116^2 + 58^2 = 16820 \quad = 2x2x2 \text{ x } 29x29$$
$$(c_4)^2 = 39^2 + 27^2 = 2250$$
$$(c_5)^2 = 125^2 + 125^2 = 31250$$

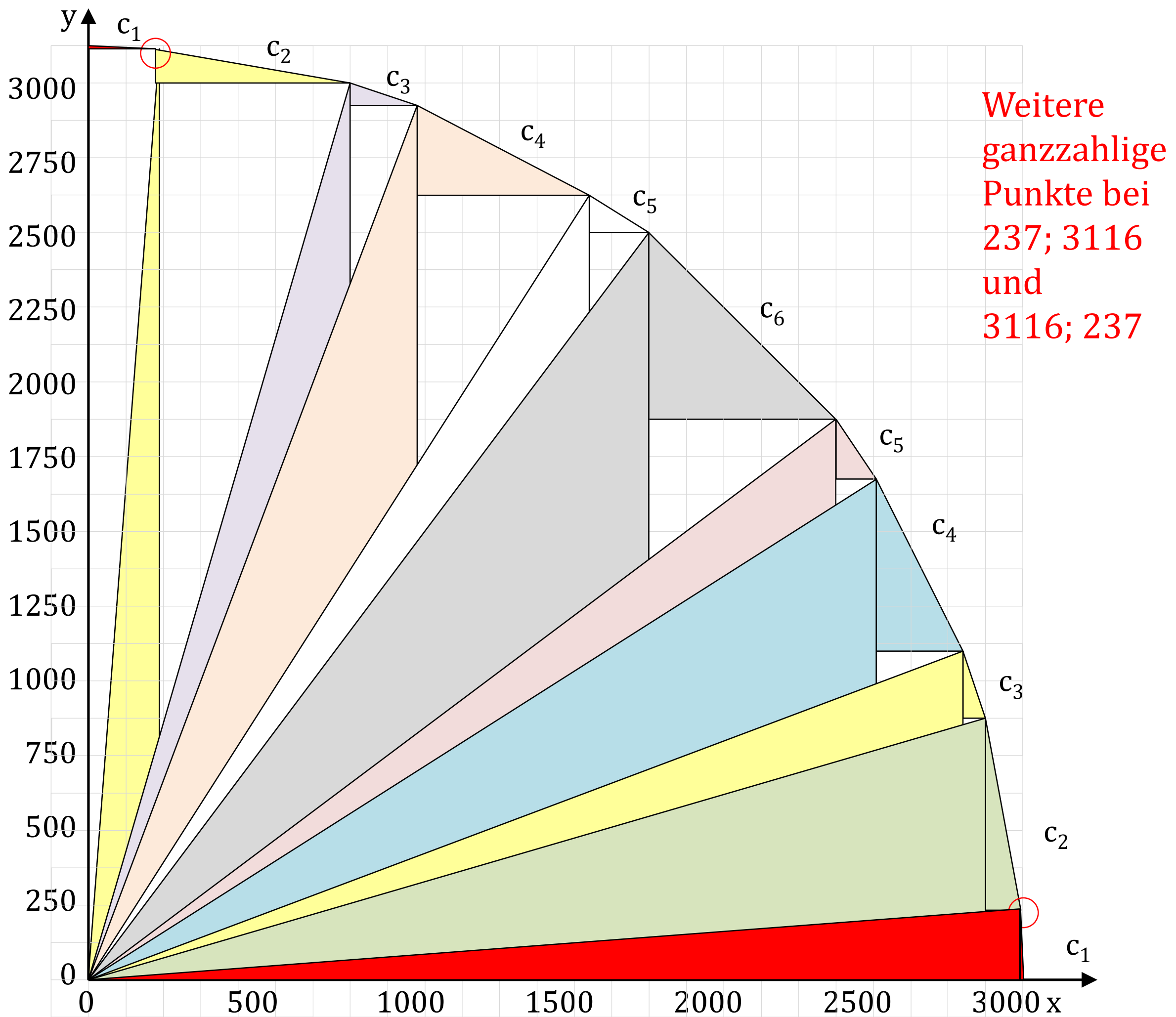
Also

$$U/4 = 3\sqrt{31250} + 4\sqrt{2250} + \sqrt{16820}$$
$$U = 4\ (\ 3\sqrt{31250} + 4\sqrt{2250} + \sqrt{16820}\ ) = 4\ (\ 3x5x5x5\ \sqrt{2} + 4x2x5x5 + \ldots)$$

Normiert auf den Kreisdurchmesser d = 1250

$$U/d = \frac{4}{1250}\ (\ 3x5x5x5\ \sqrt{2} + 4x2x5x5\ + 2x29\ \sqrt{2}\ )$$
$$U/d = 3{,}134$$

Die weitere Vergrößerung des Radius auf r=3125 ergibt weitere ganze Zahlen.



Die Dreiecke mit den Diagonalen c_1 – c_6 bilden den Innenkreis ab, mit

$$U/4 = 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2c_4 + 2c_5 + c_6$$

Dabei gilt

$(c_1)^2 = 237^2 + 9^2 \quad = 56250 \quad = 5x5x5x5 \text{ x } 3x3 \text{ x}10$

$(c_2)^2 = 116^2 + 638^2 \quad = 420500 \quad =$

$(c_3)^2 = 225^2 + 75^2 \quad = 56250 \quad =$

$(c_4)^2 = 290^2 + 580^2 \quad = 420500 \quad = 5x5x5 \text{ x } 2x2 \text{ x } 29x29$

$(c_5)^2 = 135^2 + 195^2 \quad = 56250 \quad =$

$(c_6)^2 = 625^2 + 625^2 \quad = 781250 \quad = 5x5x5x5 \text{ x}5x5x5x5 \text{ x}2$

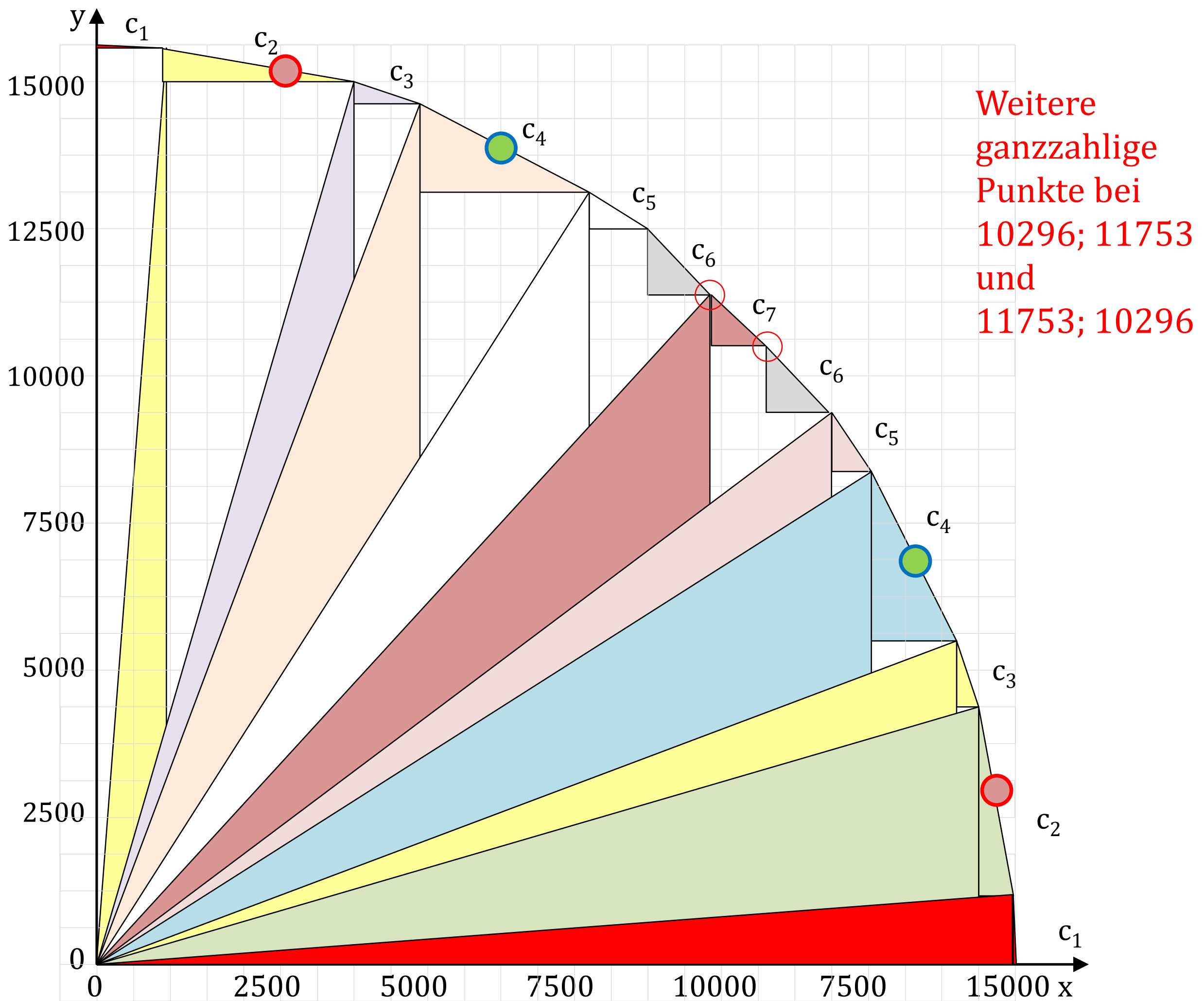
Also

$$U/4 = 6(5x5x3 \text{ x } \sqrt{10}) + 4(2x5x29 \text{ x } \sqrt{5}) + 5x5x5x5 \text{ x } \sqrt{2}$$

Normiert auf den Kreisdurchmesser d = 2x3125 = 2x 5 x 5x5x5x5

$$U/d = 3{,}138$$

Die weitere Vergrößerung des Radius auf r=15625 ergibt weitere ganze Zahlen.



Im weiteren Verlauf ergeben sich für den Radius r = 78 125 weitere ganze Zahlen bei 16124; 76443 und 76443; 16124 (siehe die nächsten 2/4 Punkte).

Wie man dem Diagramm entnehmen kann ist die Konvergenz der geometrisch Pi Rechnung leider schwach.