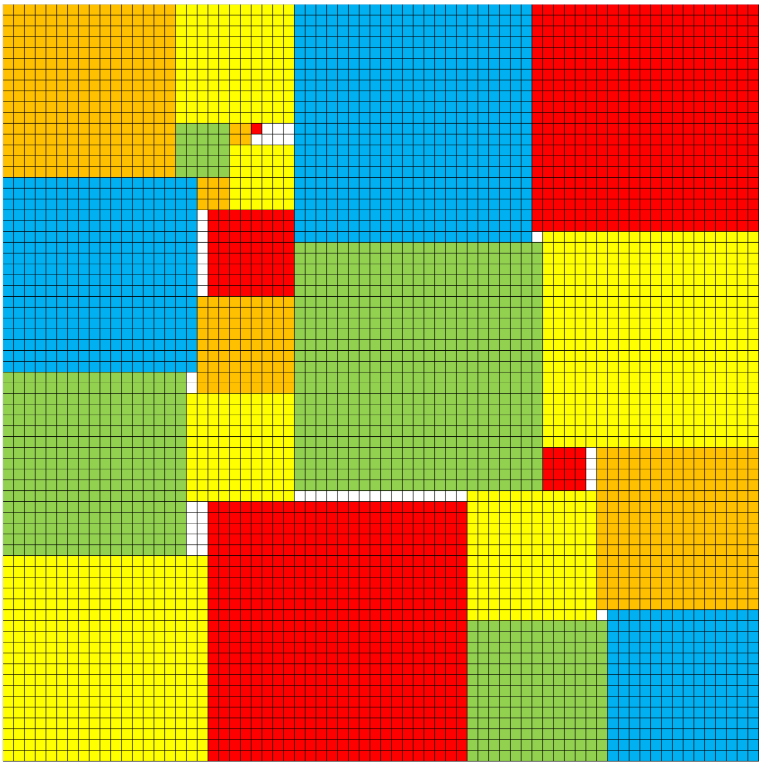
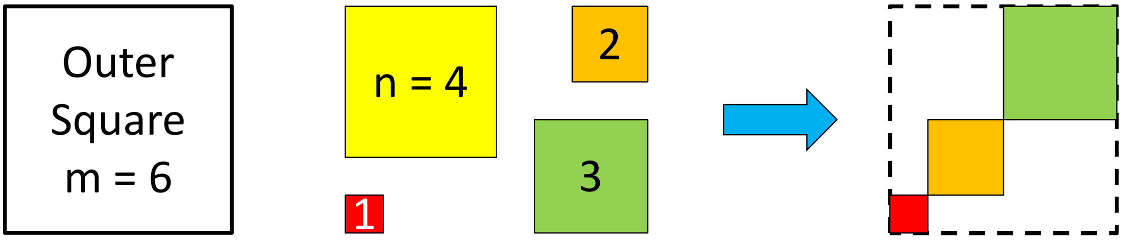


Quadrate im Quadrat

Autor:
Michael Bischoff, Parkstr. 49, D-89250 Senden

1. - Einleitung

Unter der **Quadratur des Quadrates** (Lit. 1) versteht man die lückenlose und überlappungsfreie Bedeckung („Parkettierung“) eines gegebenen Quadrates. Stuart Anderson (Lit 2) und Martin Gardner (Lit 3) stellen diverse Formen der mehr oder weniger perfekten Parkettierung vor.
Das füllen eines großen Quadrates der Kantenlänge m mit diversen kleineren Quadraten der Kantenlänge 1 bis n soll möglichst lückenlos erreicht werden.



Also gilt für die Flächen

$$\boxed{m^2 < \sum n^2 < 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2} \qquad (1.1)$$

Im obigen Beispiel mit $m = 6$ beträgt die gesamte Fläche also 36 Einheiten. Die einzelnen Quadrate der Längen n von 1 bis 4 ergeben eine Fläche von 30 FE. Also bleiben rechnerisch 6 Flächeneinheiten frei, das Quadrat lässt sich nicht perfekt belegen.

Zudem merkt man an diesem Beispiel schnell, das eine rechnerische Lösung geometrisch nicht unbedingt machbar sein muss – hier verhindert das kleine 4-er Quadrat ein anlegen des 3-er Quadrates .

Das erste theoretisch perfekte Quadrat ergibt sich für m=70 und n=1 bis 24

$$\boxed{m^2 = 70^2 = 4900 = \sum n^2 < 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 24^2 = 4900} \qquad (1.2)$$

Es bleibt kein Rest, rechnerisch geht es perfekt auf.

Leider lassen sich die Quadrate der Länge $n = 1$ bis 24 nicht in das große Quadrat anlegen da die Geometrie dies nicht zulässt (siehe obiges Beispiel). Die bisher beste Lösung muss auf ein kleines $n = 7$-er Quadrat verzichten womit dann 49 Flächeneinheiten von insgesamt 4900 FE frei bleiben (1 %).

Im Wertebereich bis $m = 2.337.238$ gibt es keine weiteren theoretisch perfekten Füllungen eines großen Quadrates durch kleinere Quadrate $n = 1$ bis 25.400.

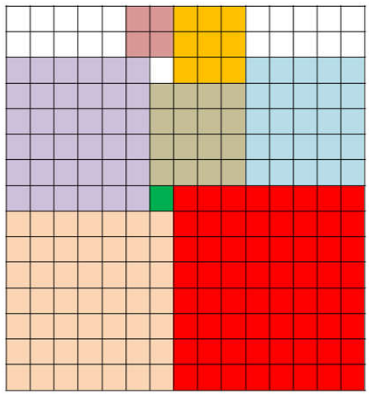
2. - Lösungsmenge

Die Beziehungsgleichung (1.1) zwischen dem großen Quadrat m_i und den kleinen Quadraten n_i kann wie folgt um den Rest verallgemeinert werden.

$$\boxed{m_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{i=k} n_i^{\,2} = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n_i^{\,2} + Rest_i} \qquad (2.1)$$

Mann kann diese Beziehung in zwei Versionen analysieren:

1. Bestimme das passende große Quadrat m_i aus den gegebenen kleinen Quadraten bis n_i bei einem sich ergebenden $Rest_i$
   also $\quad m_i = f(n_i)$
2. Bestimme das maximale kleine Quadrat n_i aus dem gegebenen großen Quadrat m_i und dem zugehörigen $Rest_i$
   oder $\quad n_i = f(m_i)$



Die Tabelle zeigt für unterschiedliche n_i die dazu passenden m_i. Bei einem $m = 15$ sind die kleinen Quadrate bis $n = 8$ möglich bei einem verbleibenden Rest von 21 Flächeneinheiten (weiße Quadrate). Dies entspricht einer fehlenden Fläche von 9%.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
m²\n²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##

m	m²\n²	Sum n²	Rest	Rest	ohne Quad	ohne n²	Ges. Rest
1	1	1	0	0%			
3	9	5	4	44%			
5	25	14	11	44%			
7	49	30	19	39%			
9	81	55	26	32%			
11	121	91	30	25%			
13	169	140	29	17%			
15	225	204	21	9%			
18	324	285	39	12%			
21	441	385	56	13%			
24	576	506	70	12%			
27	729	650	79	11%			
30	900	819	81	9%			
33	1089	1015	74	7%			
36	1296	1240	56	4%			
39	1521	1496	25	2%			
43	1849	1785	64	3%			
46	2116	2109	7	0,3%			
50	2500	2470	30	1%			
54	2916	2870	46	1,6%			
58	3364	3311	53	1,6%			
62	3844	3795	49	1,3%			
66	4356	4324	32	0,7%			
70	4900	4900	0	0%	7	49	1,0%
75	5625	5525	100	1,8%	5	25	2,2%
79	6241	6201	40	0,6%	9	81	1,9%
84	7056	6930	126	1,8%			
88	7744	7714	30	0,4%	5	25	0,7%
93	8649	8555	94	1,1%			
98	9604	9455	149	1,6%			
103	10609	10416	193	2%			
107	11449	11440	9	0,1%	9	81	0,79%
112	12544	12529	15	0,1%	8	64	0,63%
117	13689	13685	4	0,0%	9	81	0,62%

Fehlende Flächen von unter einem Prozent stellen gute Füllgrade dar.

2. - Lösungsmenge

Die andere Funktion $n_i = f(m_i)$ kann wie folgt dargestellt werden (siehe Anh.1)

Diese Berechnung ist etwas weniger aufwendig da zu einem n_i nur das passende m_i bestimmt werden muss, zudem natürlich die Berechnung des Restwertes.

Die Analyse ergibt keine weitere perfekte Quadratur im Quadrat wie sie bei n_i=24 und m_i = 70 vorliegt mit Rest = 0

Interessanterweise gibt es aber Paare von Quadraten (z.B. bei n_i = 47/48) und den dazu passenden großen Quadraten bei m_i = 189/195 die in regelmäßiger Abfolge immer wieder mal sehr kleine Restwerte ergeben (ein Restwert von 400 bei einem m_i = 1.536.060 bedeutet 1,6 x 10^{-10}), ein wirklich kleiner Restwert.

Damit ergeben sich folgende Fragen:

1. Warum gibt es diese Doppelpaare ?
2. Sind diese regelmäßig bis unendlich ?
3. Kann man die Werte m_i bestimmen ?
4. Kann man die Werte n_i bestimmen ?
5. Wie ergeben sich die Restwerte $Rest_i$?

Im Zahlenbereich bis n_i = 25.000, also der Fläche von 5.208.645.837.500 Einheiten, (dies wäre ein m_i von 2.282.246) wurde diese Funktionalität überprüft und als rechnerisch richtig bewertet.

Die geometrische Positionierung der Quadrate muss auf anderem Wege (manuell oder per PC) realisiert werden.

n	m	Rest
15	36	56
16	39	25
17	43	64
18	46	7
19	50	30
20	54	46
21	58	53
22	62	49
23	66	32
24	70	0
25	75	100

1.

45	178	289
46	184	345
47	189	1
48	195	1
49	202	379
50	208	339

2.

189	1.507	2.734
190	1.519	2.946
191	1.530	4
192	1.542	4
193	1.555	3.016
194	1.567	2.844

3.

429	5.140	9.645
430	5.158	10.109
431	5.175	9
432	5.193	9
433	5.212	10.215
434	5.230	9.815

4.

765	12.229	23.326
766	12.253	24.138
767	12.276	16
768	12.300	16
769	12.325	24.280
770	12.349	23.556

5.

1.197	23.926	46.081
1.198	23.956	47.337
1.199	23.985	25
1.200	24.015	25
1.201	24.046	47.515
1.202	24.076	46.371

20.

19.197	1.535.701	3.043.006
19.198	1.535.821	3.062.442
19.199	1.535.940	400
19.200	1.536.060	400
19.201	1.536.181	3.063.160
19.202	1.536.301	3.044.196

3. – Quadratische Paare

Die quadratischen Paare ergeben sich aus folgender tabellarischer Übersicht. Dabei ist mit k = 1 das erste Paar bei n = 47/ 48 mit dem dazu gehörenden Quadraten m = 189/ 195 bei einem Rest von 1 gemeint.

k	n-1	n	m-1	m	Rest
1	47	**48**	189	195	1
2	191	192	1.530	1.542	4
3	431	432	5.175	5.193	9
4	767	768	12.276	12.300	16
5	1.199	1.200	23.985	24.015	25
6	1.727	1.728	41.454	41.490	36
7	2.351	2.352	65.835	65.877	49
8	3.071	3.072	98.280	98.328	64
9	3.887	3.888	139.941	139.995	81
10	4.799	4.800	191.970	192.030	100
11	5.807	5.808	255.519	255.585	121
12	6.911	6.912	331.740	331.812	144
13	8.111	8.112	421.785	421.863	169
14	9.407	9.408	526.806	526.890	196
15	10.799	10.800	647.955	648.045	225
16	12.287	12.288	786.384	786.480	256
17	13.871	13.872	943.245	943.347	289
18	15.551	15.552	1.119.690	1.119.798	324
19	17.327	17.328	1.316.871	1.316.985	361
20	19.199	19.200	1.535.940	1.536.060	400
21	21.167	21.168	1.778.049	1.778.175	441
22	23.231	23.232	2.044.350	2.044.482	484
23	25.391	25.392	2.335.995	2.336.133	529

delta m
6
12
18
24
30
36
42
48
54
60
66
72
78
84
90
96
102
108
114
120
126
132
138

Schon auf den ersten Blick erkennt man irritierende Eigenschaften der einzelnen Parameter.

1. Der fehlende Rest ist offensichtlich jeweils die Quadratzahl des Index k

$$\boxed{\mathrm{Rest}_k = k^2} \tag{3.1}$$

2. Die großen Quadrate m-1 bzw. m sind im Abstand delta m von 6 k

$$\boxed{\mathrm{delta}\ m_k = 6\ k} \tag{3.2}$$

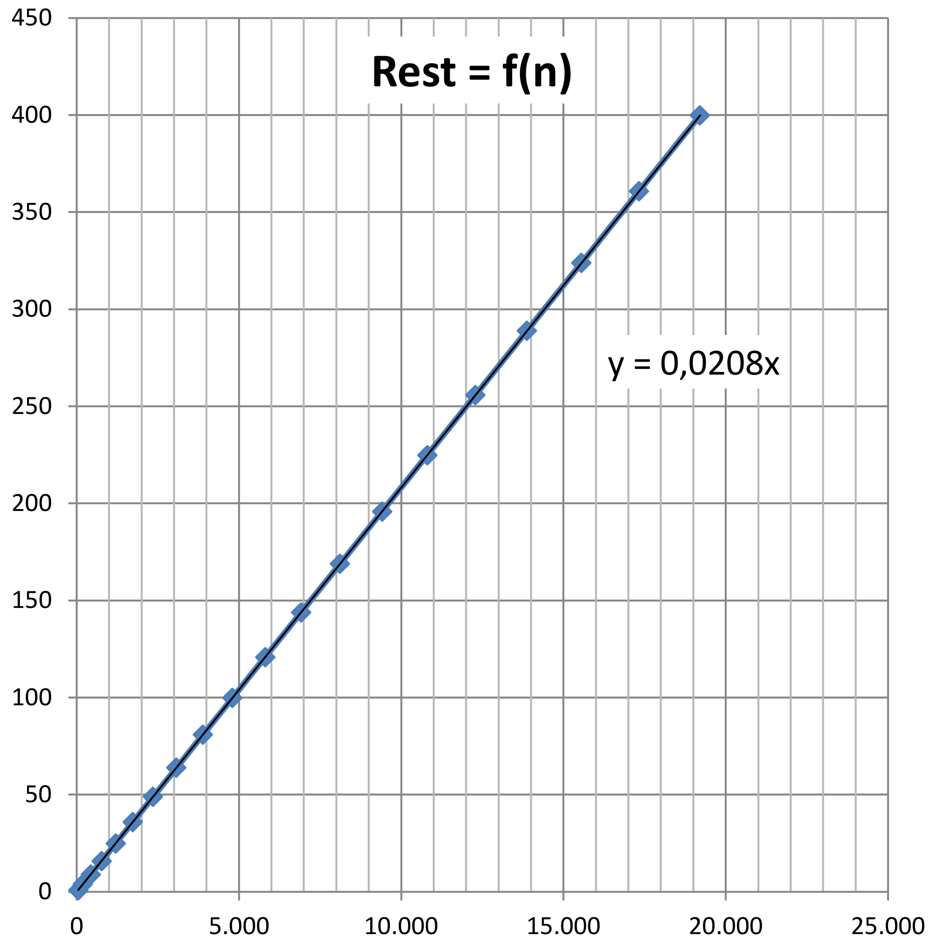
$$\boxed{m_k - 1 = m_k - \mathrm{delta}\ m_k} \tag{3.3}$$

3: Definitionsgemäß ergeben sich die kleinen Quadrate bei

$$\boxed{n_k \ \text{ und } \ n_k - 1} \tag{3.4}$$

3. - Quadratische Paare

Beachtet man die graphische Darstellung der Restmenge als Funktion von n so erkennt man einen linearen Zusammenhang



Mit der Proportionalitätskonstante 0,0208333 = 1 / 48 erhält man einen irritierend einfachen Zusammenhang der beiden Größen.

$$\text{Rest}_k = 1/48 \;\; n_k$$

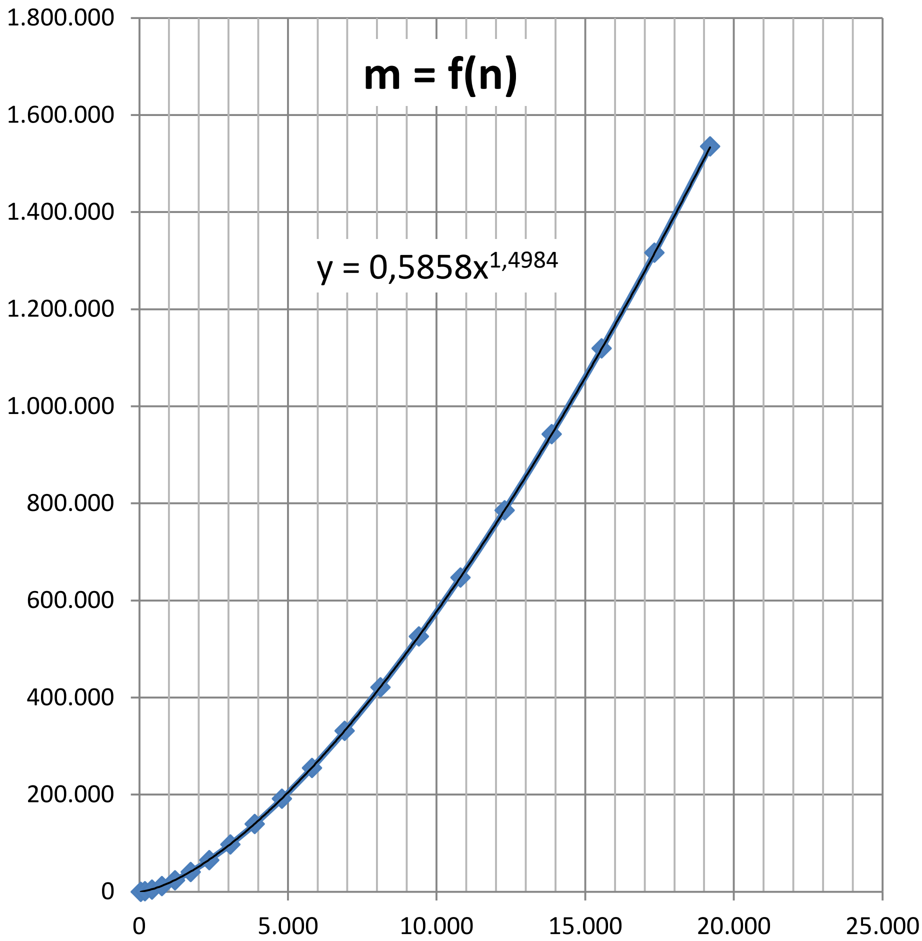
Mit dem bereits bekannten Zusammenhang (3.1) für den Rest_k folgt damit

4. Eine Beziehung für die kleinen Quadrate n_k wie folgt

$$\boxed{n_k = 48\, k^2} \tag{3.5}$$

3. – Quadratische Paare

Eine ähnliche grafische Darstellung der Kantenlänge der großen Quadrate m als Funktion der kleinen einbeschriebenen Quadrate ergibt



Man erkennt einen potenziellen Anstieg der Funktion $m = f\,(n)$

5. Die großen Quadrate der Kantenlänge m_k ergeben sich wie folgt

$$\boxed{m_k = 4\,k\,n_k + 3\,k} \tag{3.6a}$$

einsetzen von n_k gem. (3.5)

$$m_k = 4\,k\,48\,k^2 + 3\,k$$

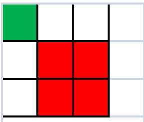
$$\boxed{m_k = 192\,k^3 + 3\,k \;= 3\,k\,(\,1 + 64\,k^2\,)} \tag{3.6b}$$

Nun ergibt sich nur noch eine Frage:

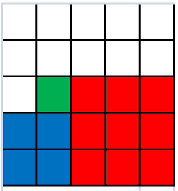
Warum ergeben sich Paare von extrem guten Restwerten bei Vielfachen von 48 aus derart einfachen Zusammenhängen ?

4. – Geometrische Lösungen der Quadrate im Quadrat

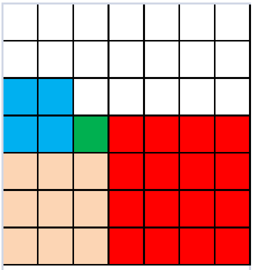
Die folgenden Darstellungen zeigen die Lösungen der Quadrate im Quadrat an.



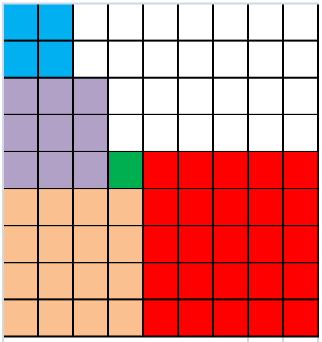
3x3 Rest 4



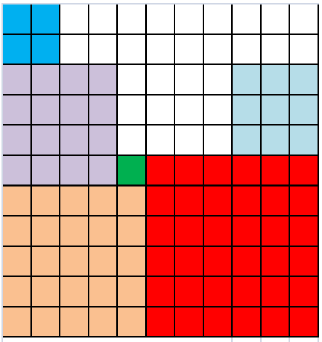
5x5 Rest 11



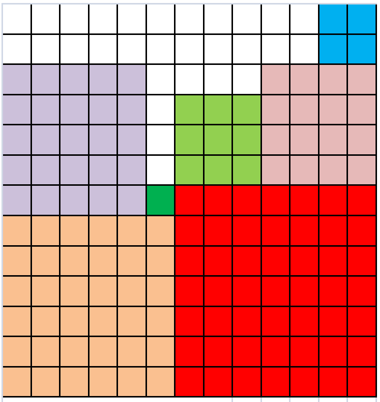
7x7 Rest 19 - 1 bis 4



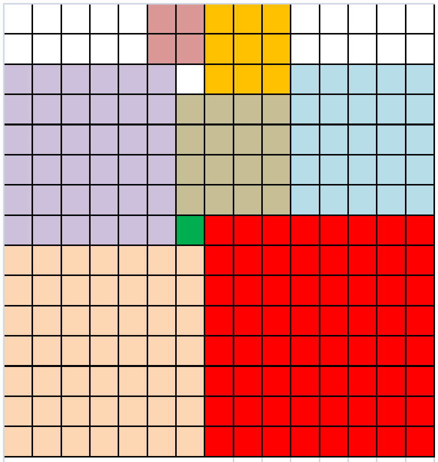
9x9 Rest 26 - 1 bis 5



11x11 Rest 30 - 1 bis 6

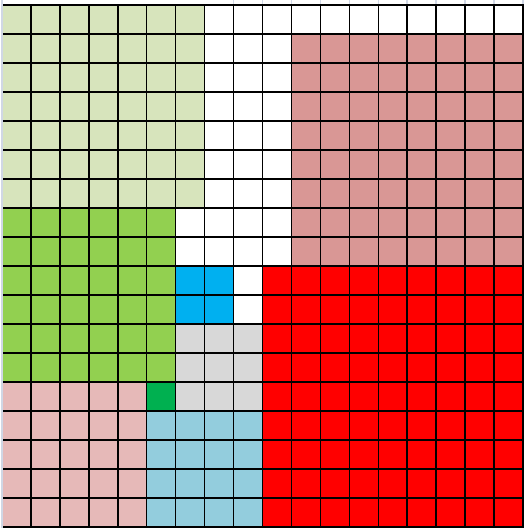


13x13 Rest 29 - 1 bis 7

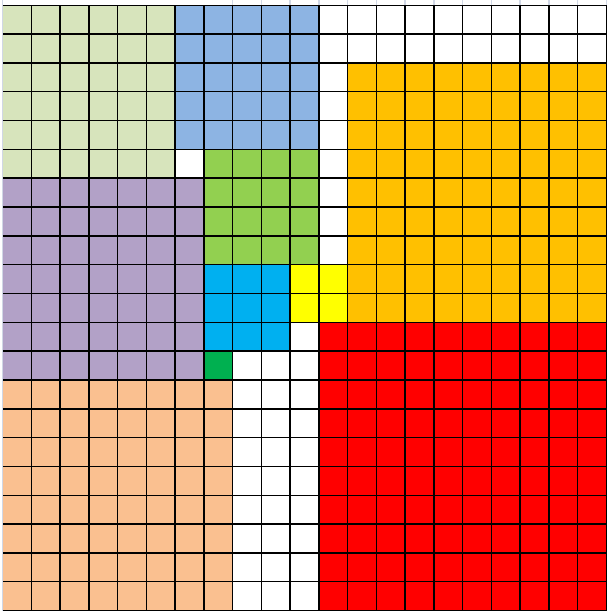


15x15 Rest 21 - 1 bis 8

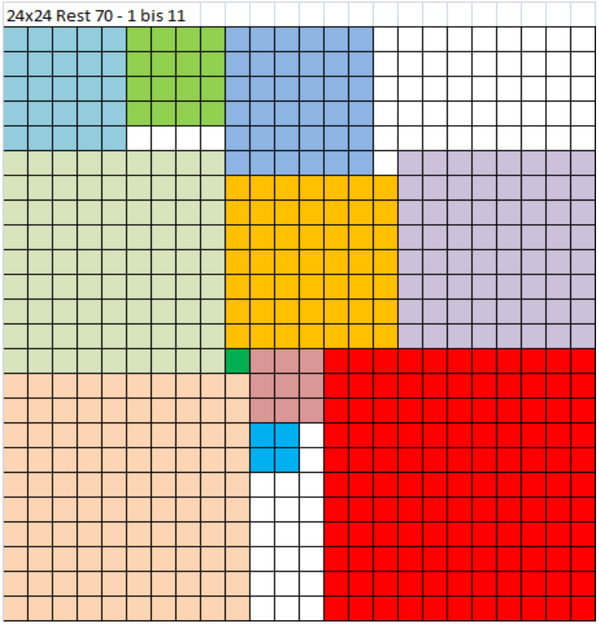
18x18 Rest 39 - 1 bis 9

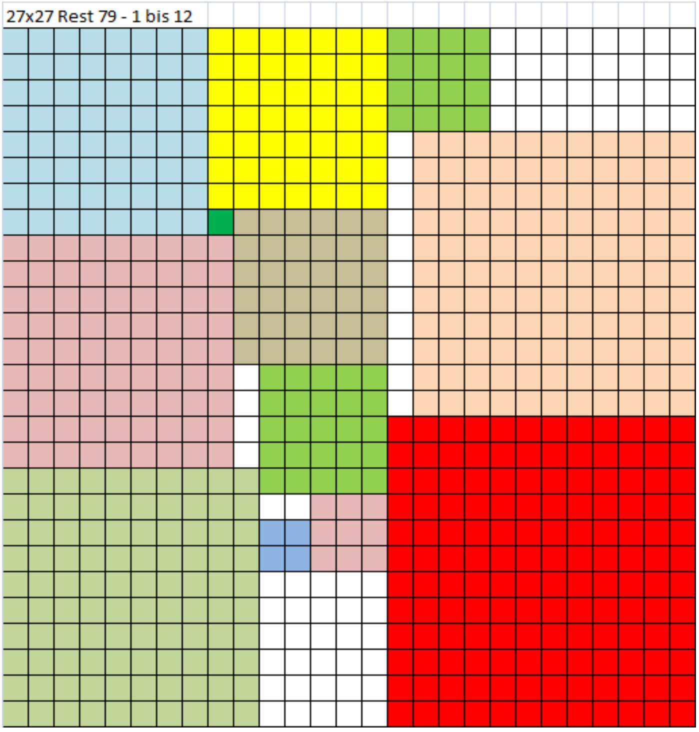


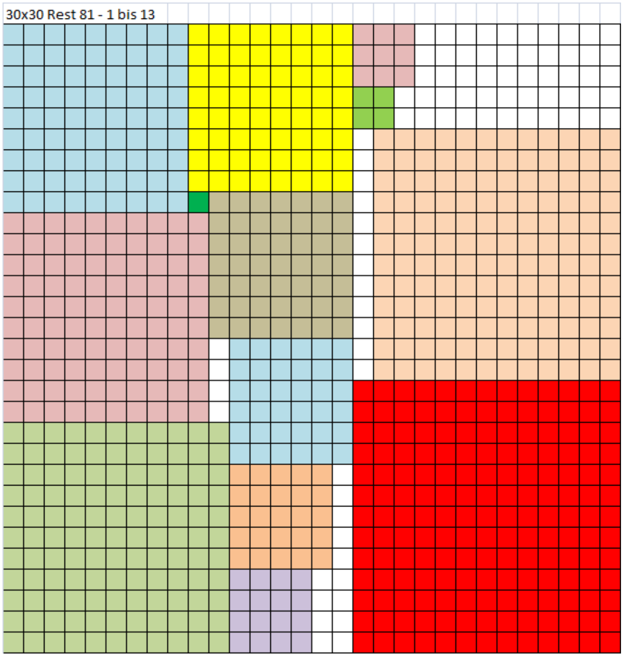
21x21 Rest 56 - 1 bis 10

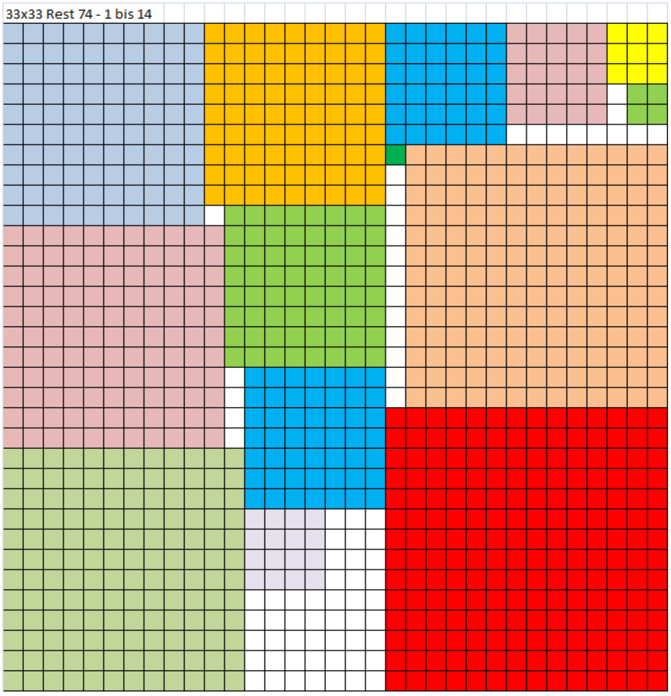


4. – Geometrische Lösungen der Quadrate im Quadrat

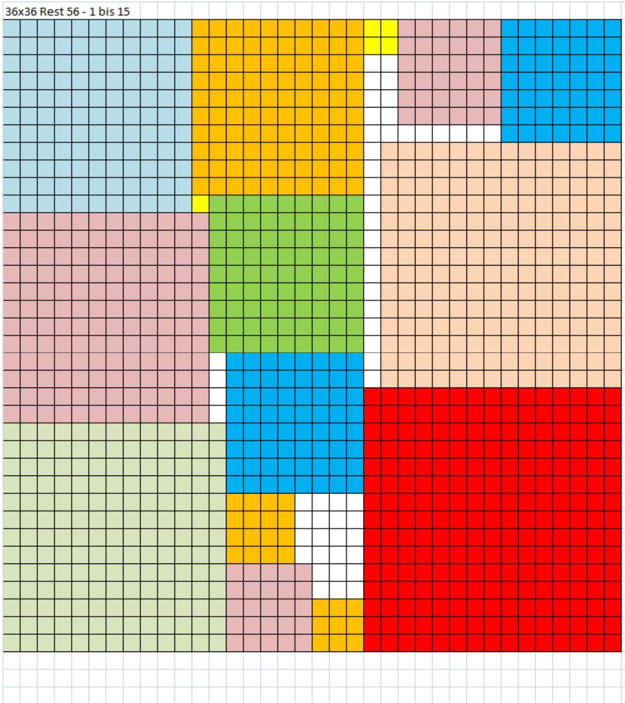


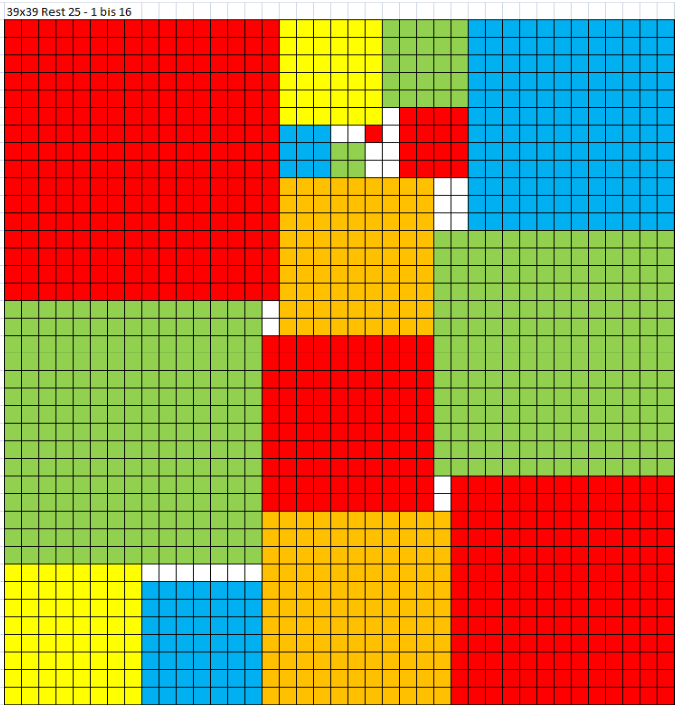


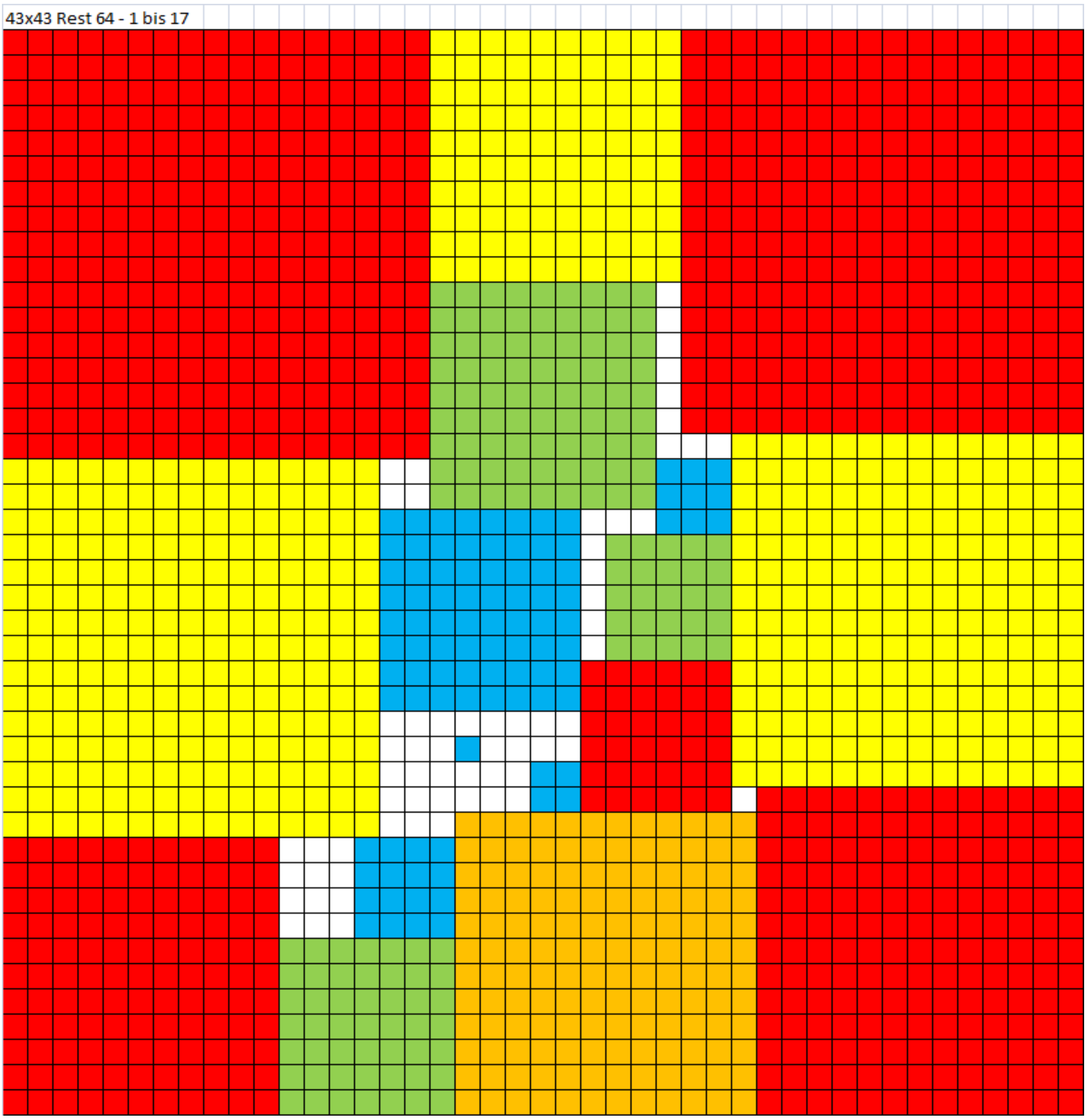




4. – Geometrische Lösungen der Quadrate im Quadrat

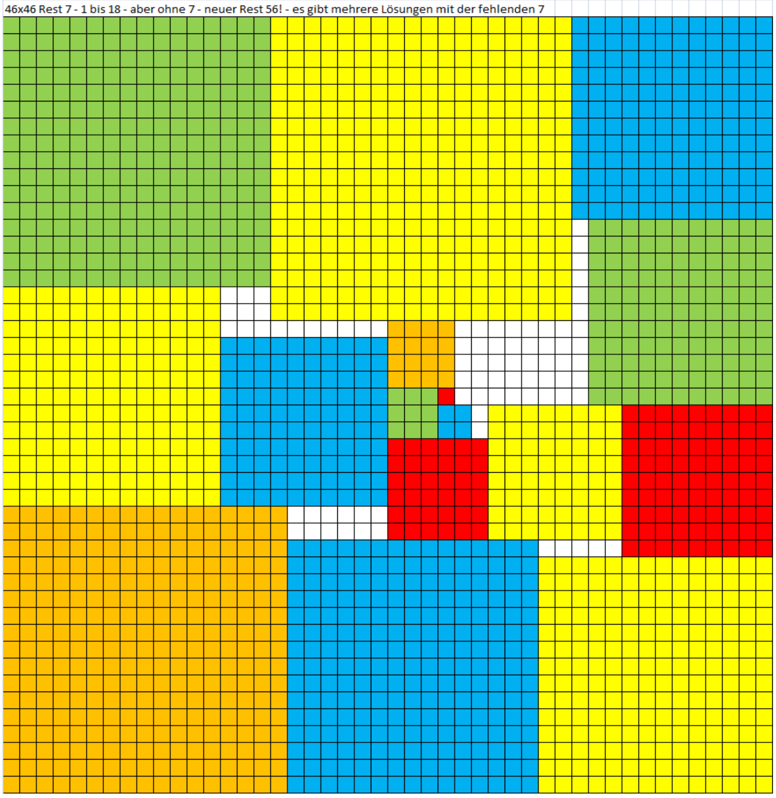




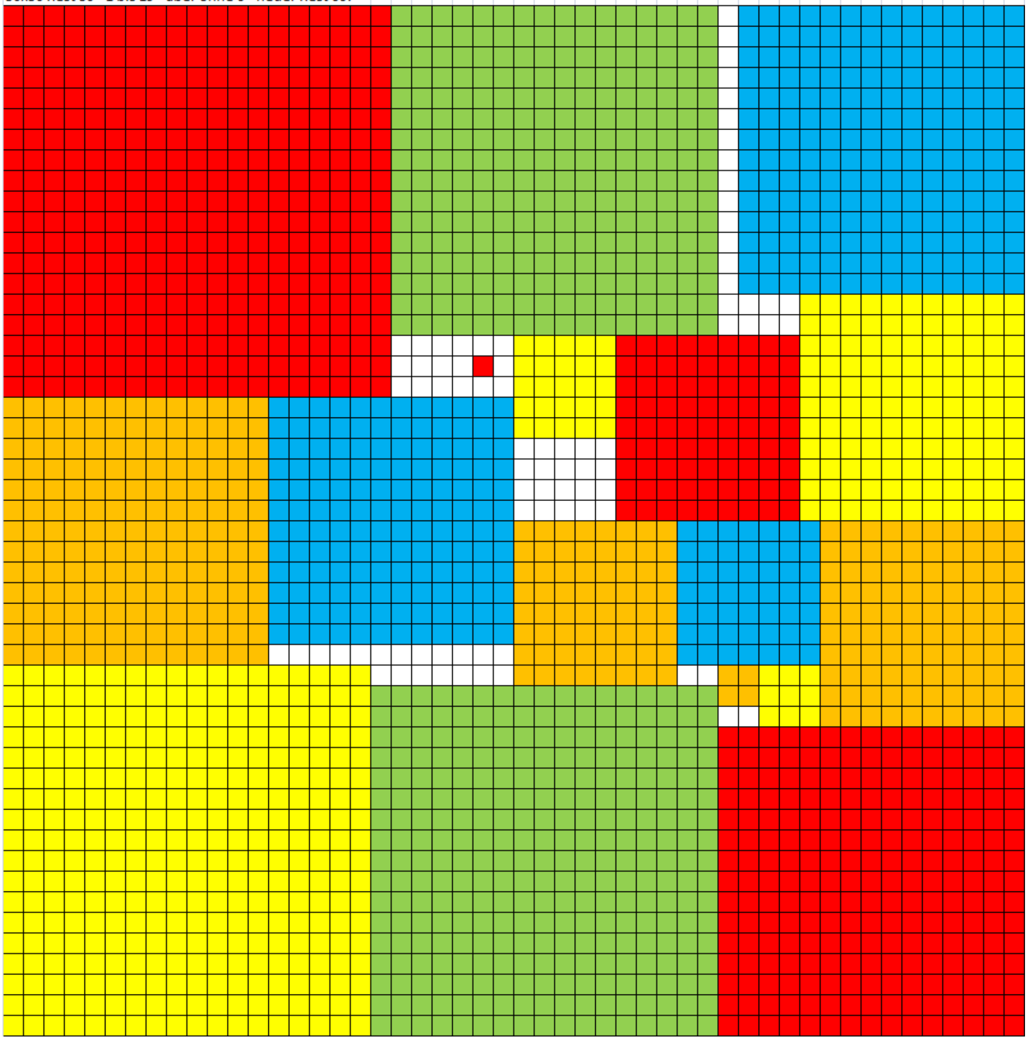


4. – Geometrische Lösungen der Quadrate im Quadrat

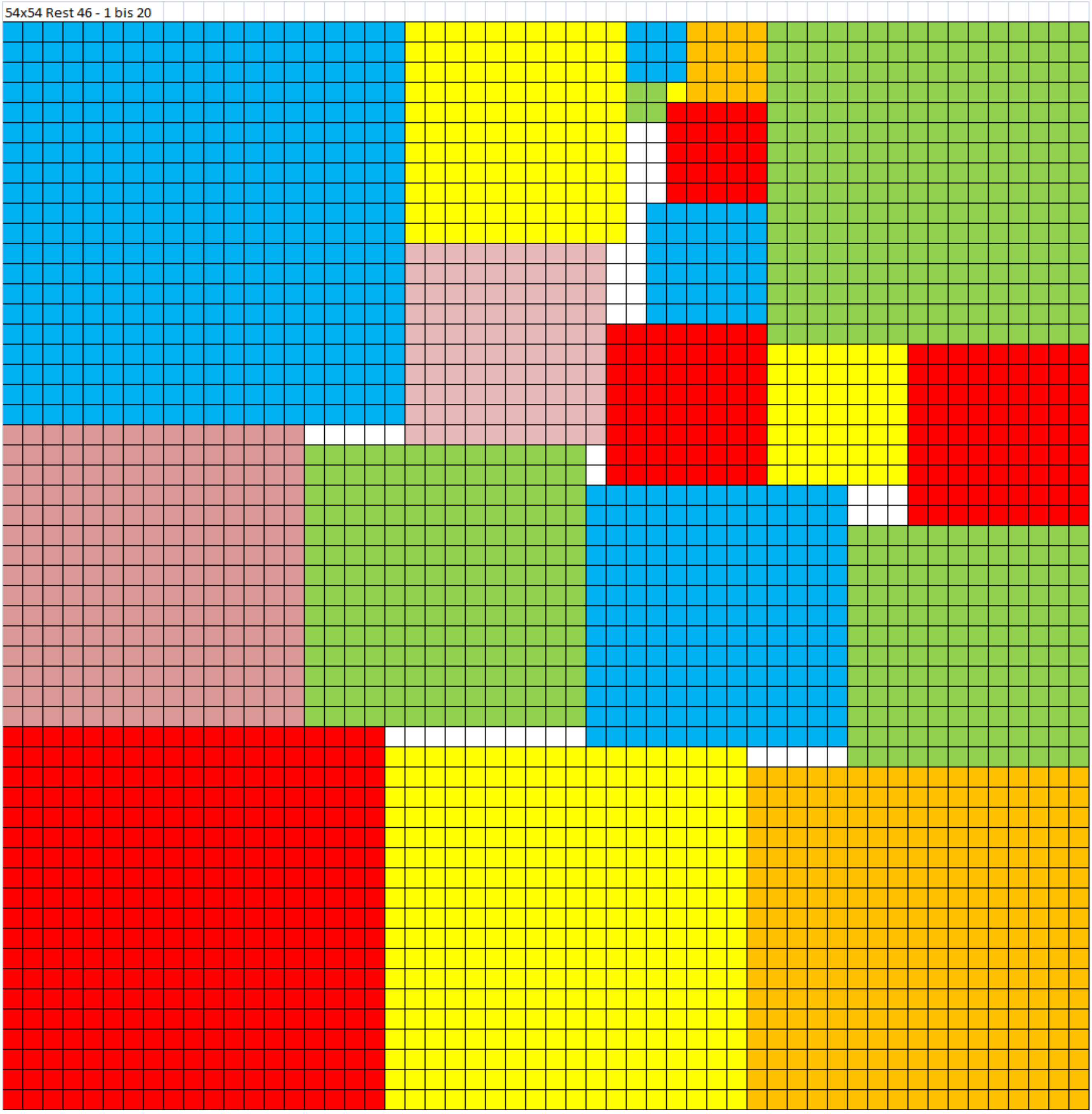
46x46 Rest 7 - 1 bis 18 - aber ohne 7 - neuer Rest 56! - es gibt mehrere Lösungen mit der fehlenden 7



50x50 Rest 30 - 1 bis 19 - aber ohne 6 - neuer Rest 66!

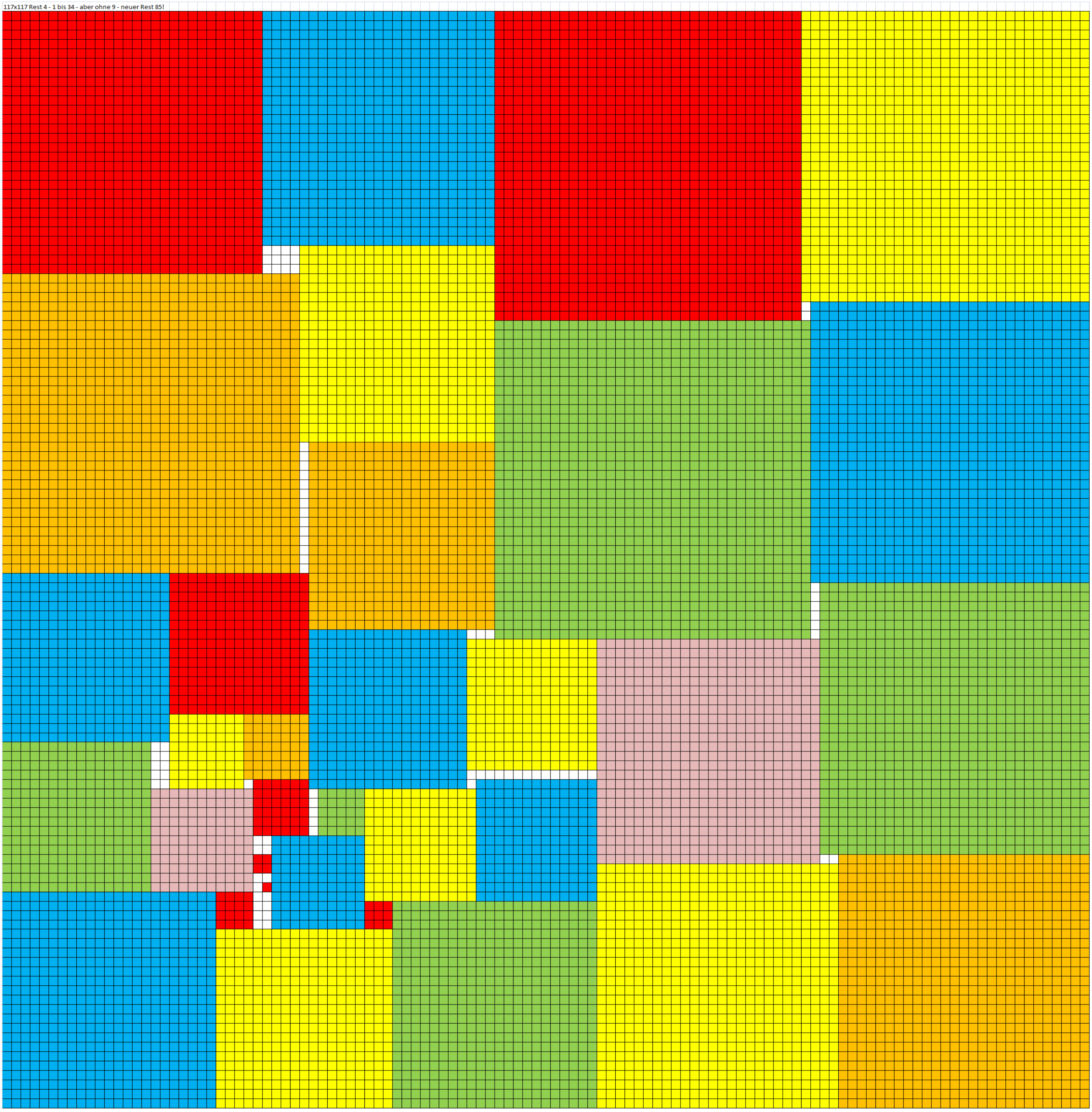


4. – Geometrische Lösungen der Quadrate im Quadrat



4. – Geometrische Lösungen der Quadrate im Quadrat

117x117 Rest 4 - 1 bis 34 - aber ohne 9 - neuer Rest 85! entspricht 0,62%



Die Berechnung gem. (2.1) ist sehr einfach

m_i = Laufvariable des großen außen liegenden Quadrates

n_i = laufvariable der kleinen innen liegenden Quadrate

$$m_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{i=k} n_i^{\,2} = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n_i^{\,2} + Rest_i \qquad (2.1)$$

Summe der n_i Quadrate

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m	m²\n²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##
1	1																														
2	4																														
3	9																														
4	16																														
5	25																														
6	36																														
7	49																														
8	64																														
9	81																														
10	100																														
11	121																														
12	144																														
13	169																														
14	196																														
15	225																														

Sum n²	Rest
1	0
1	3
5	4
14	2
14	11
30	6
30	19
55	9
55	26
91	9
91	30
140	4
140	29
140	56
204	21

Bei gegebenen n_i ergibt sich das dazu passende m_i analog aus (2.1)

n_i = Laufvariable der kleinen innen zu platzierenden Quadrate

Berechnen der Summe 1 bis n^2

Die Wurzel aus der Summe ergibt den Startwert für m_i

Den Startwert für m_i aufrunden zum endgültigem m_i

Der Rest ergibt sich aus der Differenz der Summe und $m_i^{\,2}$

n	Sum (1-n²)
1	1
2	5
3	14
4	30
5	55
6	91
7	140
8	204

Wurzel Sum	aufgerundetes m	min. Rest
1		0
2,23606798	3	4
3,74165739	4	2
5,47722558	6	6
7,41619849	8	9
9,53939201	10	9
11,8321596	12	4
14,2828569	15	21

Anhang – Literaturübersicht

	Literatur	Hinweise
[1]	https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratur_des_Quadrates	
[2]	Stuart Anderson: *Squared Squares*, 2014. (englisch) http://www.squaring.net/sq/ss/ss.html	Ausführliche Übersicht mit historischen Informationen
[3]	Martin Gardner, Mathematischer Karneval, Okt. 1977, Ullstein GmbH – Original bei Alfred A. Knopf Inc. – New York	
[4]		