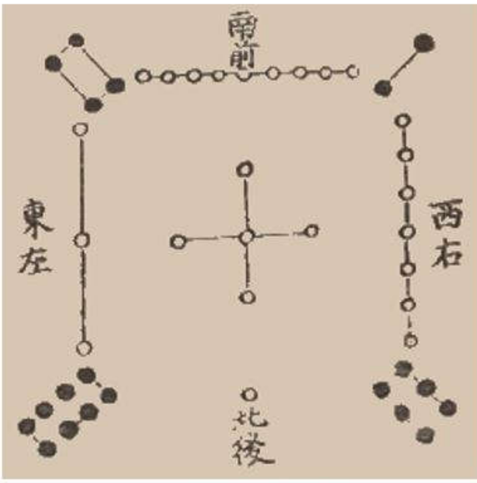


Lo Shu

Magische Quadrate
3. Ordnung

1. Grundlagen
2. Lösungen
3. Ergebnisse

A1 Literatur

A2 Mathematica

Autor:

Michael Bischoff, Parkstr. 49, D-89250 Senden

Grundlagen

Ein magisches Quadrat der Ordnung 3 wird durch eine Tabelle mit drei Zeilen und drei Spalten gebildet, indem sich für die Summen der Einzelzeilen, -spalten und den Diagonalen jeweils die gleichen Summenwerte ergeben.

Zum Beispiel dieses schon bei den Chinesen bekanntes magische Quadrat Lo-Shu aus dem 28. Jahrhundert (?) vor Chr.:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

→

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Hierbei ergibt sich die magische Summenzahl zu 15 und als Randbedingung wurde festgesetzt, dass die Zahlen von 1 bis 9 im Quadrat verwendet werden müssen.

Die magische Summenzahl „MSum“ eines Quadrates der Ordnung n (also mit n Zeilen/ Spalten) wird im allgemeinen Fall bestimmt aus der Summe der Elemente

$$MSum = \frac{1}{n} \sum_i (Elemente_i) \qquad \text{Gleichung (M3-1)}$$

Hiermit kann man beliebige Zahlen, z.B. auch Primzahlen für den Aufbau eines magischen Quadrates nutzen.

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Die magische Summe des obigen Primzahlenquadrates ist 111.

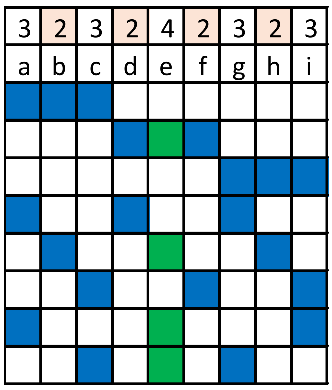
Für den Fall der natürlichen Zahlen von 1 bis n^2 gilt speziell

$$MSum = \frac{1}{2} n (n^2 + 1) \qquad \text{Gleichung (M3-2)}$$

Quadrat	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10x10
Mag Sum	15	34	65	111	175	260	369	505

Zur allgemeinen Bestimmung der Elementwerte muss folgendes Gleichungssystem für ganze Zahlen gelöst werden:

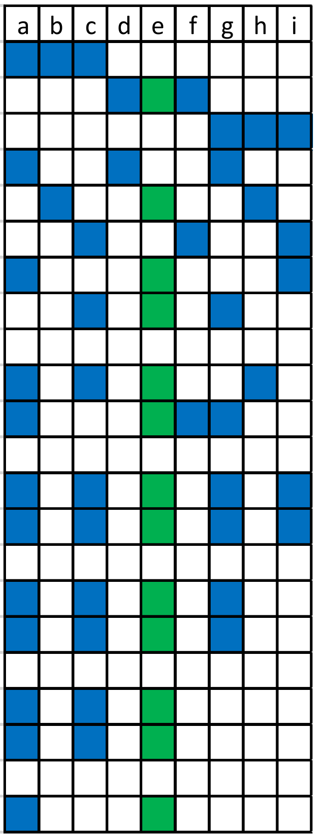
Zeile 1	Gleichung (1)	$MSum = a + b + c$
Zeile 2	(2)	$MSum = d + e + f$
Zeile 3	(3)	$MSum = g + h + i$
Spalte 1	(4)	$MSum = a + d + g$
Spalte 2	(5)	$MSum = b + e + h$
Spalte 3	(6)	$MSum = c + f + i$
Diagonale 1	(7)	$MSum = a + e + i$
Diagonale 2	(8)	$MSum = g + e + c$



Wie man sieht ergeben sich 8 Gleichungen für die neun Unbekannten a bis i und die durch Gl. M3-1 definierte magische Summenzahl MSum. Das Gleichungssystem ist also nicht vollständig. Es verbleibt mindestens ein Freiheitsgrad

Ein Lösungsweg für das Gleichungssystem von 8 Unbekannten mit 9 Gleichungen ist:

Gl. Nr.			
1	S1		
2	S2		
3	S4		
4	S2		
5	S1		
6	S3		
7	S5 / S6		
8	S7 / S8		
9	S1 = b5 in (1)		ohne b
10	S2 = d4 in (2)		ohne d
11	S3 = f6 in (10)	S5	ohne f
12	S4 = h3 in (9)	S6	ohne h
13	S5 = i7 in (11)	S7	ohne i
14	S6 = i7 in (12)	S8	ohne i
15	S7 = g8 in (13)		ohne g
16	S8 = g8 in (14)		ohne g
17	S9 = c15 in (16)		ohne c



Schritt 1: b aus Gl. 5 $MSum = b + e + h$ $b = MSum - e - h$

in Gl. 1 einsetzen $MSum = a + b + c$

$MSum = a + (MSum - e - h) + c$

$a = e + h - c$ Gl. 9

Schritt 2: d aus Gl. 4 $MSum = a + d + g$ $d = MSum - a - g$

in Gl. 2 einsetzen $MSum = d + e + f$

$MSum = (MSum - a - g) + e + f$

$a = e + f - g$ Gl. 10

Schritt 3: f aus Gl. 6 $MSum = c + f + i$ $f = MSum - c - i$

in Gl. 10 einsetzen $a = e + f - g$

$a = e + (MSum - c - i) - g$ Gl. 11

Schritt 4: h aus Gl. 3 $MSum = g + h + i$ $h = MSum - g - i$

in Gl. 9 einsetzen $a = e + h - c$

$a = e + (MSum - g - i) - c$ Gl. 12

Schritt 5: i aus Gl. 7 $MSum = a + e + i$ $i = MSum - a - e$

in Gl. 11 einsetzen $a = e + MSum - c - (MSum - a - e) - g$

$c = 2e - g$ Gl. 13

Schritt 6: i aus Gl. 7 wie Schritt 5 ???

in Gl. 12 einsetzen $c = 2e - g$ Gl. 14

Schritt 7	g aus Gl. 8	$MSum = g + e + c$	$g = MSum - e - c$	
	in Gl. 13 einsetzen	$c = 2e - (MSum - e - c)$		
		$MSum = 3e$		
		$\boxed{e = \frac{1}{3}\, MSum}$		Gleichung (M3-3)
Schritt 8	g aus Gl. 8	wie Schritt 7		
	in Gl. 14 einsetzen			

WICHTIG: Das zentrale Element „e“ ist nicht frei wählbar, sondern steht in einer festen Beziehung zur magischen Summe des 3x3 Quadrates. Die acht Gleichungen sind also nicht unabhängig voneinander! Mindestens zwei Gleichungen sind ableitbar (siehe Schritt 5/6 und 7/8). Wenn von den 8 Variablen (a … i, ohne e) die ersten beiden (a, b) als Laufvariable betrachtet werden benötigt man für die 6 verbleibenden Unbekannten nur 6 Gleichungen.

Lösungsweg

Wählt man „a“ und „b“ als Laufvariable aus so kann man die anderen Elemente berechnen.

Lösung 1	aus Gl. 1	$MSum = a + b + c$	$c = MSum - a - b$	Gl. 15
Lösung 2	aus Gl. 7	$MSum = a + e + i$	$i = MSum - a - e$	Gl. 16
Lösung 3	aus Gl. 5	$MSum = b + e + h$	$h = MSum - b - e$	Gl. 17
Lösung 4	aus Gl. 6	$MSum = c + f + i$	$f = MSum - c - i$	
		$f = MSum - c - i = MSum - (MSum - a - b) - (MSum - a - e)$		
			$f = 2a + b + e - MSum$	Gl. 18
Lösung 5	aus Gl. 2	$MSum = d + e + f$	$d = MSum - e - f$	
		$d = MSum - e - (2a + b + e - MSum)$		
			$d = 2MSum - 2e - 2a - b$	Gl. 19
Lösung 6	aus Gl. 4	$MSum = a + d + g$	$g = MSum - a - d$	
		$g = MSum - a - (2MSum - 2e - 2a - b)$		
			$g = a + b + 2e - MSum$	Gl. 20

Mit den Variablen

$$a = \begin{cases} 1 \ldots n^2 \\ a \neq e \end{cases}$$ dies sind bei einem 3x3 Quadrat also insgesamt 8 Werte

$$b = \begin{cases} 1 \ldots n^2 \\ b \neq e \\ b \neq a \end{cases}$$ hier verbleiben 7 Werte

Somit kann es maximal 8 x 7 = 56 mögliche Kombinationen ergeben, die zu einem magischen Quadrat der Ordnung 3 passen.

Einschränkende Randbedingungen sind

1. Die Werte dürfen nur im Wertebereich zwischen 1 und n^2 liegen
2. Die Werte dürfen demzufolge nicht kleiner als 1 sein bzw.
3. Die Werte dürfen nicht größer als n^2 sein
4. Und alle Werte von 1 bis n^2 dürfen nur einmal Verwendung finden

Ergebnisse

Die Tabelle zeigt alle 56 Lösungsmöglichkeiten mit einer magischen Summe von 15.
Die rot gekennzeichneten Elemente verstoßen gegen die o.a. Randbedingungen.

3	Ordnung MQ	9	Elemente	15	Mag. Summe	5	Element e

	Element b																				
a1	2			3			4			6			7			8			9		
1	1	2	12	1	3	11	1	4	10	1	6	8	1	7	7	1	8	6	1	9	5
	16	5	-6	15	5	-5	14	5	-4	12	5	-2	11	5	-1	10	5	0	9	5	1
	-2	8	9	-1	7	9	0	6	9	2	4	9	3	3	9	4	2	9	5	1	9
a2	1			3			4			6			7			8			9		
2	2	1	12	2	3	10	2	4	9	2	6	7	2	7	6	2	8	5	2	9	4
	15	5	-5	13	5	-3	12	5	-2	10	5	0	9	5	1	8	5	2	7	5	3
	-2	9	8	0	7	8	1	6	8	3	4	8	4	3	8	5	2	8	6	1	8
a3	1			2			4			6			7			8			9		
3	3	1	11	3	2	10	3	4	8	3	6	6	3	7	5	3	8	4	3	9	3
	13	5	-3	12	5	-2	10	5	0	8	5	2	7	5	3	6	5	4	5	5	5
	-1	9	7	0	8	7	2	6	7	4	4	7	5	3	7	6	2	7	7	1	7
a4	1			2			3			6			7			8			9		
4	4	1	10	4	2	9	4	3	8	4	6	5	4	7	4	4	8	3	4	9	2
	11	5	-1	10	5	0	9	5	1	6	5	4	5	5	5	4	5	6	3	5	7
	0	9	6	1	8	6	2	7	6	5	4	6	6	3	6	7	2	6	8	1	6
a6	1			2			3			4			7			8			9		
6	6	1	8	6	2	7	6	3	6	6	4	5	6	7	2	6	8	1	6	9	0
	7	5	3	6	5	4	5	5	5	4	5	6	1	5	9	0	5	10	-1	5	11
	2	9	4	3	8	4	4	7	4	5	6	4	8	3	4	9	2	4	10	1	4
a7	1			2			3			4			6			8			9		
7	7	1	7	7	2	6	7	3	5	7	4	4	7	6	2	7	8	0	7	9	-1
	5	5	5	4	5	6	3	5	7	2	5	8	0	5	10	-2	5	12	-3	5	13
	3	9	3	4	8	3	5	7	3	6	6	3	8	4	3	10	2	3	11	1	3
a8	1			2			3			4			6			7			9		
8	8	1	6	8	2	5	8	3	4	8	4	3	8	6	1	8	7	0	8	9	-2
	3	5	7	2	5	8	1	5	9	0	5	10	-2	5	12	-3	5	13	-5	5	15
	4	9	2	5	8	2	6	7	2	7	6	2	9	4	2	10	3	2	12	1	2
a9	2			2			3			4			6			7			8		
9	9	2	4	9	2	4	9	3	3	9	4	2	9	6	0	9	7	-1	9	8	-2
	0	5	10	0	5	10	-1	5	11	-2	5	12	-4	5	14	-5	5	15	-6	5	16
	6	8	1	6	8	1	7	7	1	8	6	1	10	4	1	11	3	1	12	2	1

Wie man erkennen kann gibt es 8 Lösungen, die sich aber durch Spiegelung an den horizontalen, vertikalen, Diagonalen bzw. n-fache 90 Grad Drehungen ineinander überführen lassen.

Faktisch gibt es nur eine einzige Lösung für die Zahlenwerte 1 bis $n^2 = 9$

A1 Literatur

1. Wie üblich gibt es eine sehr schöne Einführung in die Thematik der magischen Quadrate bei Wikipedia unter https://de.wikipedia.org/wiki/Magisches_Quadrat
2. Aber auch bei den Mathematischen Basteleien sind interessante Informationen enthalten http://www.mathematische-basteleien.de/magquadrat.htm
3. Eine unfassbar detaillierte Darstellung magischer Quadrate findet man auf 1244 Seiten mit 583 Literaturhinweisen bei Holger Danielsson der auf diese Art das gesamte Wissen zu magischen Quadraten zusammen gefasst hat unter http://www.magic-squares.info/
4. Eine sehr ausführliche Darstellung findet man auch bei Walter Trump unter http://www.trump.de/

A2 Mathematica

```
In[]:= Solve[{a + b + c == msum, d + e + f == msum, g + h + i == msum, a + d + g == msum, b + e + h == msum, c + f + i == msum,
       löse
        a + e + i == msum, g + e + c == msum}, {c, d, e, f, g, h, i}]
```

Out[]= $\left\{\left\{c \to -a - b + msum,\ d \to -2a - b + \frac{4\,msum}{3},\ e \to \frac{msum}{3},\ f \to \frac{1}{3}(6a + 3b - 2\,msum),\ g \to \frac{1}{3}(3a + 3b - msum),\ h \to -b + \frac{2\,msum}{3},\ i \to -a + \frac{2\,msum}{3}\right\}\right\}$