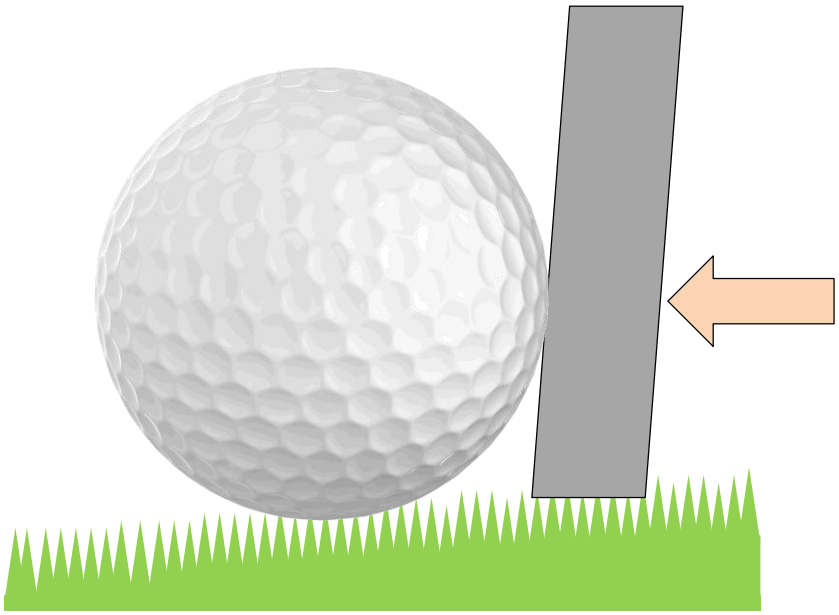


# Der „optimale“ Putt

1. Physikalische Grundlagen
2. Schräge Ebene
3. Der reibungsfreie Putt auf der idealen Ebene
4. Konstante Reibung – einfache Modell
5. Konstante Reibung – exakte Lösung der DGL
6. Stokes‘sche Reibung
7. Vergleich mit anderen Veröffentlichungen
8. Welchen Einfluss haben die Reibungsmodelle?
9. Sensitivitätsanalyse

10. Diskussion der Ergebnisse

Anhang: Literatur

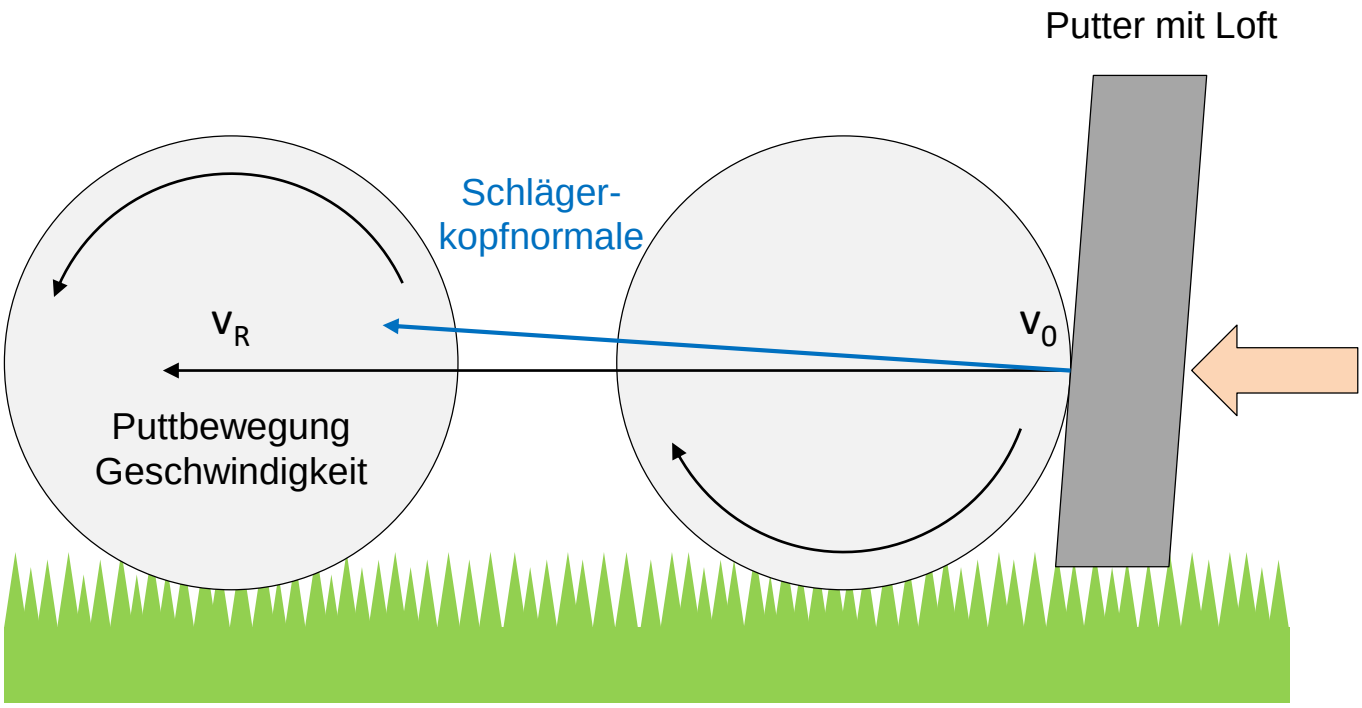
Autor: Michael Bischoff, Parkstr. 49, D-89250 Senden

# 1. Physikalische Grundlagen des Puttens

Folgender Ablauf geschieht beim Putten:

1. Der Putter mit einem Loft von typischerweise 4 Grad trifft den Ball unterhalb des Ball Äquators bei δz = Ballradius x sin φ = 21,3 mm x sin 4 Grad = 1,5 mm
2. Der Ball macht eine mehr (oder wenig große) Flugphase (schräger Wurf) bevor der Ball das Grün wieder berührt und mit einer
3. Gleitphase startet. Die Reibung beim gleiten mit dem Gleitreibungskoeffizienten baut die Geschwindigkeit v des Balles soweit ab bis er ins
4. Rollen mit dem Rollreibungskoeffizienten kommt. Der Ball rollt solange bis die Geschwindigkeit durch die Reibung zu null abgebaut wird.

Für die Reibungskraft gibt es mehrere physikalische Ansätze. Die Reibung ist im Idealfall zu vernachlässigen, ist proportional zum aufliegenden Ballgewicht bzw. ist proportional zur Geschwindigkeit des Balles auf dem Rasen (Stokes‘sche R.)




In Ergänzung zur sehr anschaulichen Darstellung der „Physik des Golfspiels“ in dem interessanten Buch von Iván Egry aus dem Wiley-VCH Verlag werden hier für den praktischen Golfer **Näherungen** für die korrekte Ausrichtung des Putts bei einem Uphill Putt auf Seite 34 und für den Downhill Fall auf Seite 33 angegeben.

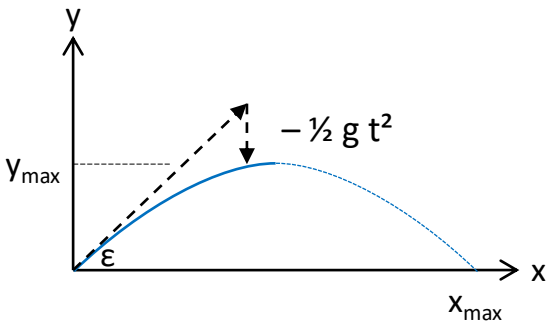
Üben, üben und nochmals üben bleibt trotz der Theorie weiterhin das A und O beim Putten auf dem Grün.

# Der Putt beginnt mit einem schrägen Wurf

Der Golfschläger mit dem Loft von typischerweise 4 Grad trifft den Ball mit einer Geschwindigkeit $V_0$ unter dem Winkel ε zur Waagerechten.

Die Koordinaten eines Punktes der Bahn mit der Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s² als Funktion der Zeit t ergibt sich zu

$$x = V_0\, t \cos \varepsilon$$
$$y = V_0\, t \sin \varepsilon - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$




einsetzen von $t = x / V_0 \cos \varepsilon$ ergibt die Bahngleichung des schrägen Wurfes

$$y = x \tan \varepsilon - \frac{g\ x^2}{2\ (V_0 \cos \varepsilon)^2} \qquad (1.1)$$

Die maximale Wurf- bzw. Flugweite des Balles ergibt sich für y = 0 zu

$$x_{max} = \frac{2\ (V_0)^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{g} \qquad (1.2)$$

Die maximale Flughöhe des Golfballes ergibt sich im Maximum der Parabel durch differenzieren und Null setzen zu

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varepsilon - \frac{2\, g\, x}{2\ (V_0 \cos \varepsilon)^2} = 0$$

$$x = \frac{[V_0]^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{g}$$

$$y_{max} = \frac{[V_0]^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{g} \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} - \frac{g}{2\ (V_0 \cos \varepsilon)^2} \frac{\{\, [V_0]^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \,\}^2}{g^2}$$

$$y_{max} = \frac{[V_0 \sin \varepsilon\ ]^2}{2\, g} \qquad (1.3)$$

Beispiel: $V_0$ sei 2 m/s und der Loftwinkel des Putters beträgt ε = 4 Grad

$x_{max}$ = 0,056 m

$y_{max}$ = 0,002 m

Der schräge Flug des Golfballes ist also nur 2 mm hoch und 56 mm weit, also fast nicht bemerkbar (wenn man die Größe des Balles mit einem Durchmesser von 42,6 mm beachtet)

# Der horizontale Putt mit konstanter Gleitreibung

Nach der angenommenen kleinen Flugphase durch den „schrägen Wurf“ wird in der Gleitphase der Ball durch die Reibungskraft in seiner Geschwindigkeit reduziert.
Es gilt Kraft = Masse mal Beschleunigung mit g = Erdbeschleunigung
Dabei sei die Gleitreibungskonstante $\mu_G$ nur abhängig vom Gewicht des Balls.

$$F = m\,a = m\,\frac{dv}{dt} = -\,\mu_G\; m\,g$$

Somit die Bewegungsgleichung für die Gleitphase durch Integration über die Zeit

$$v = v_0 - \mu_G\,g\,t$$

Ausgehend von der Startgeschwindigkeit $v_0$ des Balles wird v kleiner !
Integration ergibt den zurückgelegten Weg in der Gleitphase

$$s_g = v_0\,t - \frac{1}{2}\,\mu_G\,g\,t^2$$

Zur Info: Der Gleitreibungskoeffizient eines Golfballes auf dem Rasen liegt in der Größenordnung von ca. 0,4 … 0,5

Der Golfball wird durch den Putter beschleunigt auf die Geschwindigkeit v.
Durch die Gleitreibungskraft $\mu_G\,m\,g$ am Golfballradius r wird ein Drehmoment M auf den Golfball erzeugt mit J als Massenträgheitsmoment einer Kugel und der Winkelbeschleunigung $\alpha = d\omega/dt$

$$M = J\,\alpha = \frac{2}{5}\,m\,r^2\,\frac{d\omega}{dt} = \mu_G\,m\,g\,r$$

Somit die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{5\;\mu_G\,g}{2\,r}$$

Integriert über die Zeit folgt die mit der Zeit steigende Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{5\,\mu_G\,g}{2\,r}\,t$$

Nach einer gewissen Zeit t beginnt der Golfball zu rollen, wenn die Umfangs-Geschwindigkeit am Golfballradius der Geschwindigkeit v entspricht

$$v = \omega\,r = \frac{5\,\mu_G\,g}{2\,r}\,t\,r = v_0 - \mu_G\,g\,t$$

Auflösen nach t ergibt

$$v_0 = \frac{7}{2}\ \mu_G\ g\ t$$

Zum Zeitpunkt $t_R$ beginnt der Golfball also zu rollen

$$t_R = \frac{2}{7}\ \frac{v_0}{\mu_G\ g}$$

Die Geschwindigkeit des rollenden Golfballes $v_R$ zu diesem Zeitpunkt beträgt

$$v_R = v_0 - \mu_G\ g\ t_R = v_0 - \mu_G\ g\ v_0 / (3{,}5\ \mu_G\ g) = 5/7\ v_0$$

Und die bis zu diesem Zeitpunkt erreichte Gleitstrecke $s_G$ ergibt sich aus

$$s_G = v_0\ t_R - \tfrac{1}{2}\ \mu_G\ g\ t_R^2$$

$$s_G = v_0 \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_G\ g} - \frac{1}{2}\ \mu_G\ g\ \left(\frac{2\ v_0}{7\ \mu_G\ g}\right)^2 = \frac{(v_0)^2}{\mu_G\ g}\left[\frac{14 - 2}{49}\right]$$

$$\boxed{s_G = \frac{12}{49}\ \frac{(v_0)^2}{\mu_G\ g}} \qquad (1.4)$$

Beispiel: Bei einer ursprünglichen Startgeschwindigkeit von $v_0 = 2$ m/s folgt bei einem Gleitfaktor $\mu_G = 0{,}4$ eine Gleitstrecke von 0,249 m.

Die gesamte Puttlänge setzt sich aus der Flugphase, der Gleitphase und der abschließenden Rollphase zusammen.
Die Rollphase folgt ebenso der allgemeinen Bewegungsgleichung des Balles.
Nur wird hierbei die Gleitreibung $\mu_G$ durch die Rollreibung $\mu_R$ ersetzt.
Es gilt wieder für die Geschwindigkeit v und die zurückgelegte Strecke s

$$v = v_R - \mu_R\ g\ t$$

$$s_R = v_R\ t - \tfrac{1}{2}\ \mu_R\ g\ t^2$$

Der Ball rollt so lange bis v null wird >>> $t_R = \frac{v_R}{\mu_R\ g}$
Dann beträgt die zurückgelegte Rollstrecke

$$s_R = v_R\ \frac{v_R}{\mu_R\ g} - \frac{1}{2}\ \mu_R\ g\ \left[\frac{v_R}{\mu_R\ g}\right]^2$$

$$\boxed{s_R = \frac{1}{2}\ \frac{[\ v_R\ ]^2}{\mu_R\ g}} \qquad (1.5)$$

## Der horizontale Putt mit konstanter Gleitreibung

Mit der sich aus $v_0$ ergebenden Rollgeschwindigkeit $v_R = 5/7\ v_0$ folgt dann

$$s_R = \frac{25}{49}\ \frac{[\,v_0\,]^2}{2\,\mu_R\,g}$$

Beispiel: mit $v_0 = 2$ m/s und der Rollreibung $\mu_R = 0{,}095$ folgt $s_R = 1{,}09$ m

Das Stimpmeter zur Messung der Grüngeschwindigkeit (von Edward Stimpson 1935 erfunden) nutzt die o.a. Gleichung zur Bestimmung des Stimpfaktors SF. Dabei wird von einer Rollgeschwindigkeit von 6 feet/sec ausgegangen, die Länge (gemessen in feet) des rollenden Ball gibt den Stimpfaktor SF wieder.

Der Rollreibungskoeffizient ergibt sich mit der definierten Rollgeschwindigkeit und der Gravitationskonstante von g = 9.81 m/s² = 32,185 feet/s² zu

$$\mu_R = \frac{0{,}559}{SF} \qquad (1.6)$$

Typische Werte des Rollreibungskoeffizienten $\mu_R$ sind bei einem

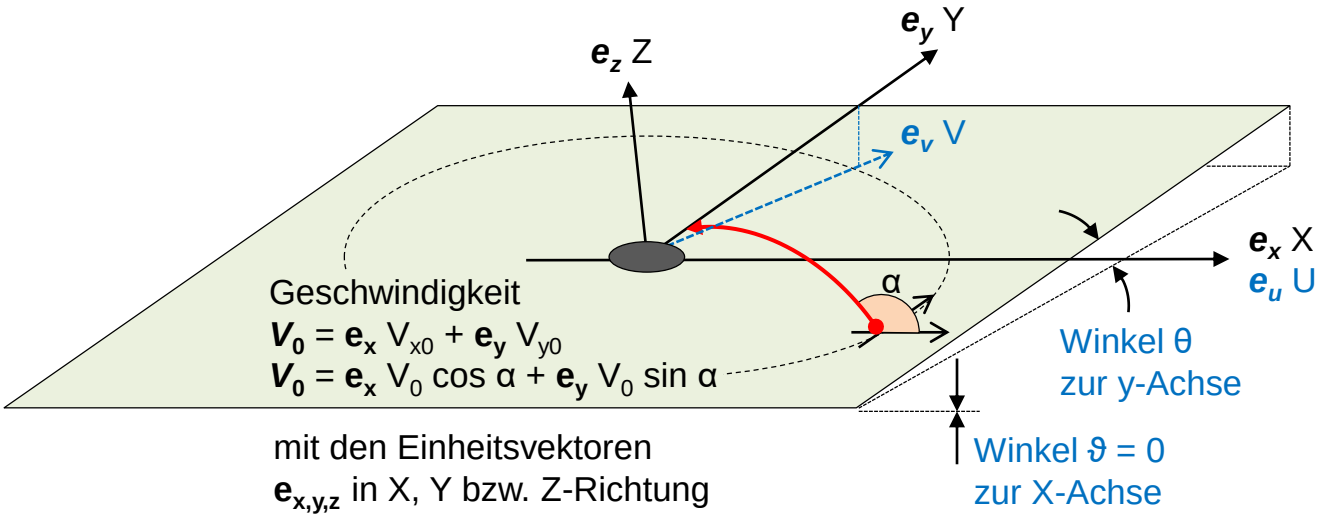
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| - | langsamen | Grün mit einem SF von | 4 | damit $\mu_R$ zu | 0,140 |
| - | mittlerem | Grün | 6 | | 0,095 |
| - | schnellem | Grün | 8 | | 0,070 |
| - | sehr schnellem (PGA) | Grün | 10 | | 0,056 |

**Frage**: beschreiben diese Gleichungen die physikalische Realität ?
Die Geschwindigkeit eines geputteten Balls wird gem. Gleichung $v = v_0 - \mu_R\,g\,t$ für große Zeiten t zuerst Null werden und dann negativ !
Analog wird die Weggleichung zuerst Null und dann auch negativ.
Dieser Ansatz kann also nur eine erste Näherung darstellen.

## 2. Die Schräge Ebene

Gegeben sei folgendes allgemeines Koordinatensystem UVW auf dem eine Fläche F(X,Y,Z) liegt. Im Koordinatenursprung bei X=Y=Z = 0 sei das zu erreichende Loch mit dem Loch (Hole) Radius $R_H$ = 5,4 cm angebracht.

Für den Fall einer um den Winkel θ geneigten Ebene gilt folgendes Bild.




Für die o.a. schräge XY-Ebene unter dem Winkel θ gelten folgende Beziehungen

$$P(X,Y,Z) = e_x X + e_y Y + e_z Z \qquad P(U,V,W) = e_u U + e_v V + e_w W$$

$$\begin{aligned} X &= U & U &= X \\ Y &= V\cos\theta + W\sin\theta & V &= Y\cos\theta - Z\sin\theta \\ Z &= -V\sin\theta + W\cos\theta & W &= Y\sin\theta + Z\cos\theta \end{aligned} \qquad (2.1)$$

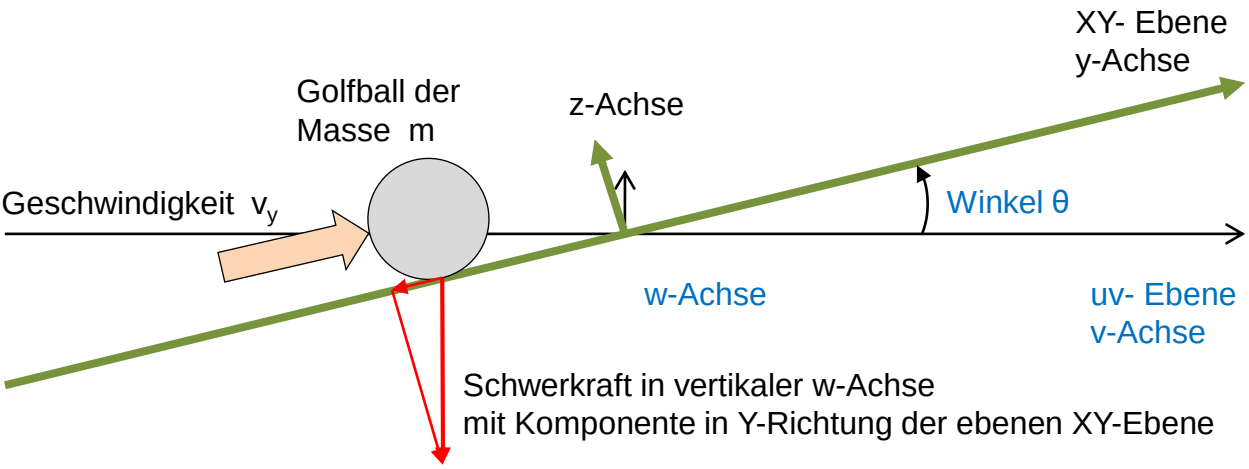
Dabei sind $e_{x...z}$ bzw. $e_{u...w}$ die Einheitsvektoren im XYZ und UVW System.

Der Startpunkt $R_{x0}$, $R_{y0}$ des Putts liege auf dem Kreisradius $R = \sqrt{R^2_{x0} + R^2_{y0}}$
Die Startgeschwindigkeit betrage $V_0$ mit den Komponenten $V_{x0}$ und $V_{y0}$
Der Ball wird unter dem Winkel α in Richtung Loch geputtet mit $\tan\alpha = V_{y0} / V_{x0}$

Auf den in der XY-Ebene rollenden Ball wirken Reibungskräfte der aktuellen Bewegungsrichtung/ Geschwindigkeit entgegen. Zudem wirkt auf den Ball die Gravitationskraft und beschleunigt/ bremst den Ball im Downhill/ Uphill Fall.
Die Gravitationskraft in negativer W-Achse in der horizontalen UV-Ebene wirkt proportional dem Neigungswinkel θ entsprechend in der Y-Achse.

## 3. Der Putt auf einem idealen reibungsfreien Grün

Der Startpunkt $x_0$, $y_0$ des Putts liege auf dem Kreisradius $R = \sqrt{x^2_0 + y^2_0}$
Die Startgeschwindigkeit betrage $v_0$ mit den Komponenten $v_{0x}$ und $v_{0y}$
Der Ball wird im Winkel $\Phi$ Richtung Loch geputtet, dabei gilt $\tan \Phi = v_{0y} / v_{0x}$




Die Newton'schen Bewegungsgleichungen in der XY-Ebene für die x-Achse

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$ ohne Reibung in der X-Achse

Integration der Gleichung führt zur Geschwindigkeit

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} dt = \text{Int.Konst}$$ für t = 0 ist die Startgeschwindigkeit definiert zu $v_{0x}$

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}$$ Geschwindigkeit in x-Richtung ändert sich nicht !

Integration führt zur Gleichung der Wegstrecke in x-Richtung

$$\int dx = v_{0x} \int dt$$

$x = v_{0x}\, t + \text{Int. Konst.}$ für t = 0 ist der Startpunkt definiert zu $x_0$

$x = v_{0x}\, t + x_0$ somit die Wegstrecke in x-Richtung

Umstellen nach t führt zu

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

# Der Putt auf einem idealen reibungsfreien Grün

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen für y in der xy-Ebene (bei z=0) lauten

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - mg \sin\theta$$ die Gravitationskraft wirkt y entgegen

Integration der Gleichungen führt zu

$$\int \frac{d^2y}{dt} = - \int mg \sin\theta \; dt$$

$$\frac{dy}{dt} = - t \; g \sin\theta + \text{Int. Konstante}$$ für t = 0 ist definiert $v_{y0}$

$$\frac{dy}{dt} = - \; t \; g \sin\theta + v_{y0}$$

Nochmalige Integration führt zu

$$y = \frac{-1}{2} t^2 \, g \sin\theta + v_{y0} \, t + \text{Int.Konst.}$$ für t = 0 ist definiert $y_0$

$$y = \frac{-1}{2} t^2 \, g \sin\theta + v_{y0} \, t + y_0$$

Einsetzen der Zeit t aus der obigen x Beziehung

$$y = \frac{-1}{2} \left[ \frac{x - x_0}{v_{x0}} \right]^2 g \sin\theta + v_{y0} \left[ \frac{x - x_0}{v_{x0}} \right] + y_0 \qquad (3.1)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit den Startwerten $x_0$, $y_0 - v_{x0}$, $v_{y0}$ und θ

WICHTIG: nur für Putts aus der unteren Hemisphäre ergibt sich eine umgedrehte Parabel. Putts von „oben" laufen auf Grund der fehlenden Reibung immer schneller nach negativen y-Werten.

Die Steigung der Parabel erhält man durch differenzieren nach x

$$\frac{dy}{dx} = \left\{ \frac{-1}{2} \left[ \frac{x^2 - 2 \, x \, x_0 + x_0^2}{(v_{x0})^2} \right] g \sin\theta + v_{y0} \left[ \frac{x - x_0}{v_{x0}} \right] + y_0 \right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} \; \frac{2 \, x - 2 \, x_0}{(v_{x0})^2} \; g \sin\theta + v_{y0} \frac{1}{v_{x0}}$$

Somit die Tangente/ Steigung der Parabel

$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} - ( x - x_0 ) \; \frac{g \sin\theta}{(v_{x0})^2}$$

Der Schnittpunkt der Tangente vom Punkt $x_0$ $y_0$ mit der y-Achse (bei x=0)

$$y_{up/\,down} = - \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \; x_0 + y_0 \qquad (3.2)$$

# Bestimmung der Startwerte auf dem Grün – Uphill Putt

Das Loch ist im Koordinatenursprung bei X = Y = 0 angeordnet. Beim Uphill putten nach „oben“ soll der Ball das Loch mit der Geschwindigkeit dy/dt = $v_{yLoch}$ erreichen

$$dy/dt = v_{yLoch} = -\,t\,g\,\sin\theta + v_{y0} \qquad \text{somit} \quad t = \frac{v_{y0} - v_{yLoch}}{g\,\sin\theta}$$

Somit gilt für die x-Koordinate und damit dann die Startgeschwindigkeit in x-Richtung

$$x = 0 = v_{x0}\,t + x_0 = \frac{v_{0x}\,(v_{y0} - v_{yLoch})}{g\,\sin\theta} + x_0 \quad >>> \quad v_{x0} = -\,\frac{x_0\,g\,\sin\theta}{(v_{y0} - v_{yLoch})}$$

Da wir das Loch bei x,y = 0,0 treffen wollen folgt mit $v_{0x}$

$$y = 0 = -\,\frac{1}{2}\,[\frac{0 - x_0}{v_{x0}}]^2\,g\,\sin\theta + v_{y0}\,[\frac{0 - x_0}{v_{x0}}] + y_0$$

$$0 = -\frac{1}{2}\,\frac{[-x_0\,(v_{y0} - v_{yLoch})]^2}{[-x_0\,g\,\sin\theta]^2}\,g\,\sin\theta + v_{y0}\,[\frac{-x_0\,(v_{y0} - v_{yLoch})}{-x_0\,g\,\sin\theta}] + y_0$$

$$2\,y_0\,g\,\sin\theta = (v_{y0} - v_{yLoch})^2 - 2\,v_{y0}\,(v_{y0} - v_{yLoch}) = v^2_{y0} - 2\,v_{y0}v_{yLo} + v^2_{yLo} - 2\,v^2_{y0} + 2\,v_{y0}\,v_{yLo}$$

Somit ergibt sich direkt eine Gleichung für $v_{y0}$

$$v_{y0} = \pm\sqrt{|\,y_0\,2\,g\,\sin\theta - v^2_{yLoch}\,|} \qquad (3.3)$$

Einsetzen in die obige Gleichung für $v_{x0}$ ergibt

$$v_{x0} = \frac{-\,x_0\,g\,\sin\theta}{\sqrt{|\,y_0\,2\,g\,\sin\theta - v^2_{yLoch}\,|} - v_{yLoch}} \qquad (3.4)$$

Für den Fall $v_{yLoch}$ = 0 ergibt sich speziell:
Das Verhältnis $v_{y0}/v_{x0}$ – also die Steigung ergibt sich bei $v_{yLoch}$ = 0

$$\frac{v_{y0}}{v_{x0}} = 2\frac{y_0}{x_0}$$

Der Schnittpunkt der Tangente an die Parabel mit der y-Achse (bei x=0)

$$y = mx + n = m\,(x - x_0) + y_0 \qquad >>> \qquad y = 2\,y_0/x_0\,(x\text{-}x_0) + y_0$$

$$y = -\,2\,y_0 + y_0 = -\,y_0$$

Der Zielpunkt für $V_{yLoch}$ = 0 liegt also in gleicher $y_0$ Entfernung auf der y-Achse !

# Bestimmung der Startwerte auf dem Grün – Downhill Putt

Das Loch ist im Koordinatenursprung bei X = Y = 0 angeordnet. Beim Putt aus der „oberen“ Hemisphäre nach „unten“ soll der Ball das Loch bei x=y=0 treffen.

$$y = 0 = -\frac{1}{2}\left[\frac{0 - x_0}{v_{0x}}\right]^2 g \sin\theta + v_{0y}\left[\frac{0 - x_0}{v_{0x}}\right] + y_0$$

Somit ergibt sich eine Geschwindigkeit in y-Richtung zu

$$v_{0y} = \frac{v_{0x}}{x_0}\left[y_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{v_{0x}}\right)^2 g \sin\theta\right] = v_{0x}\frac{y_0}{x_0} - \frac{x_0}{v_{0x}}\frac{g \sin\theta}{2}$$

Diese Geschwindigkeit sollte minimal sein zum Zeitpunkt des Einlochens, da die Bälle „ohne Reibung“ ja immer schneller werden (wenn sie das Loch verpassen).

Differenzieren nach der $v_{0x}$ Geschwindigkeit führt zu

$$\frac{dv_{0y}}{dv_{0x}} = \frac{y_0}{x_0} - \frac{x_0}{(v_{0x})^2}\frac{g \sin\theta}{2} = 0$$

Somit folgt die „optimale“ Geschwindigkeit in x-Richtung, die zu einer minimalen Start Geschwindigkeit in x-Richtung führt.

$$v_{0x} = \pm\sqrt{\frac{(x_0)^2}{|y_0|}\frac{g \sin\theta}{2}}$$

positive v für linke Halbebene
negative v für rechte Halbebene

(3.5)

Wichtig: diese Startgeschwindigkeit gilt auch für den Uphill Putt

Das negative (positive) Vorzeichen vor der Wurzel gilt für positive (negative) $x_0$
Die Start Geschwindigkeit in y-Richtung beträgt dann

$v_{0y} = 0$ für Downhill Putt

$V_{0y} = \sqrt{y_0\, 2\, g \sin\theta}$ für Uphill Putt

(3.6)

Die Steigung im Punkt $x_0$,$y_0$ beim Start des Putts beträgt

$$m = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = 0$$

Somit muss für Putts in Richtung Loch bei x=y=0 aus der „oberen“ Hemisphäre der Wert bei $y=y_0$ auf der y-Achse angepeilt werden.

Für die Ausrichtung des Putts gibt es optimale mathematisch Werte.
Jetzt muss „nur“ noch mit der „richtigen“ Geschwindigkeit geputtet werden !

# Generalisierte Uphill/ Downhill Funktion

Mit der nun bekannten Startgeschwindigkeiten in x bzw y-Richtung erhält man

$$v_{0x} = \pm \sqrt{\frac{(x_0)^2}{|y_0|}\,\frac{g \sin\theta}{2}} \qquad V_{0y} = \begin{cases} \sqrt{y_0\, 2\, g \sin\theta} & \text{Uphill} \\ 0 & \text{Downhill} \end{cases}$$

Die Wegfunktion y = F(x) lautet

$$y = \frac{-1}{2}\left[\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right]^2 g \sin\theta + v_{0y}\left[\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right] + y_0$$

Downhill:

$$y = \frac{-1}{2}\,\frac{[x^2 - 2\,x\,x_0 + (x_0)^2]\,(g \sin\theta)\,2\,|y_0|}{(x_0)^2\; g \sin\theta} + y_0\,\frac{(x_0)^2}{(x_0)^2}$$

$$y = \frac{y_0}{(x_0)^2}\,[\,-x^2 + 2xx_0 - (x_0)^2 + (x_0)^2\,]$$

$$y = \frac{y_0}{(x_0)^2}\,[\,2xx_0 - x^2\,]$$

Berücksichtigung der negativen y-Werte für den Uphill Fall

Uphill:

$$y = \frac{-1}{2}\,\frac{[x^2 - 2\,x\,x_0 + (x_0)^2]\,(g \sin\theta)\,2\,(-y_0)}{(x_0)^2\; g \sin\theta} + \sqrt{\frac{(y_0\, 2\, g \sin\theta)2y_0}{(x_0)^2\; g \sin\theta}}\,(x - x_0) + y_0\,\frac{(x_0)^2}{(x_0)^2}$$

$$y = \frac{y_0}{(x_0)^2}\,[\,x^2 - 2xx_0 + (x_0)^2 + 2x_0(x - x_0) + (x_0)^2\,]$$

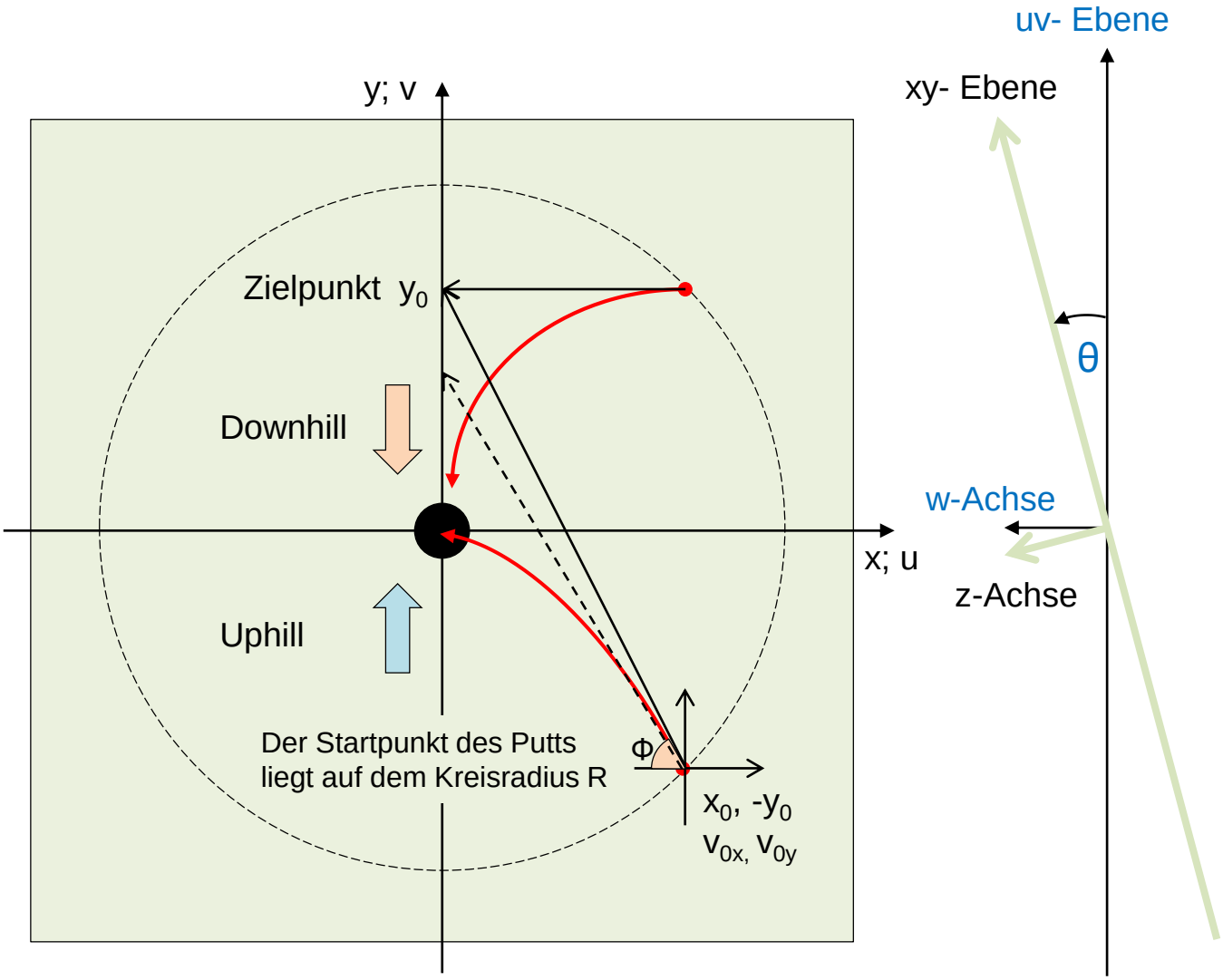
$$y = \frac{y_0}{(x_0)^2}\,[\,x^2]$$

Überraschenderweise sind die Parabelfunktionen für den Uphill und den Downhill Fall unabhängig vom Anstellwinkel der Fläche. Dies ergibt sich natürlich nur für den optimalen Fall der „richtig“ gewählten Geschwindigkeiten.

# Zusammenfassung für den idealen reibungsfreien Putt

Sowohl beim Uphill als auch beim Downhill Putt ist als Zielpunkt der Wert $y = y_0$ auf der positiven y-Achse anzupeilen.

Diese mathematisch optimalen Zielwerte sind der Ausgangspunkt jeden Putts mit einer jeweils optimalen Geschwindigkeit in x bzw. y-Richtung.

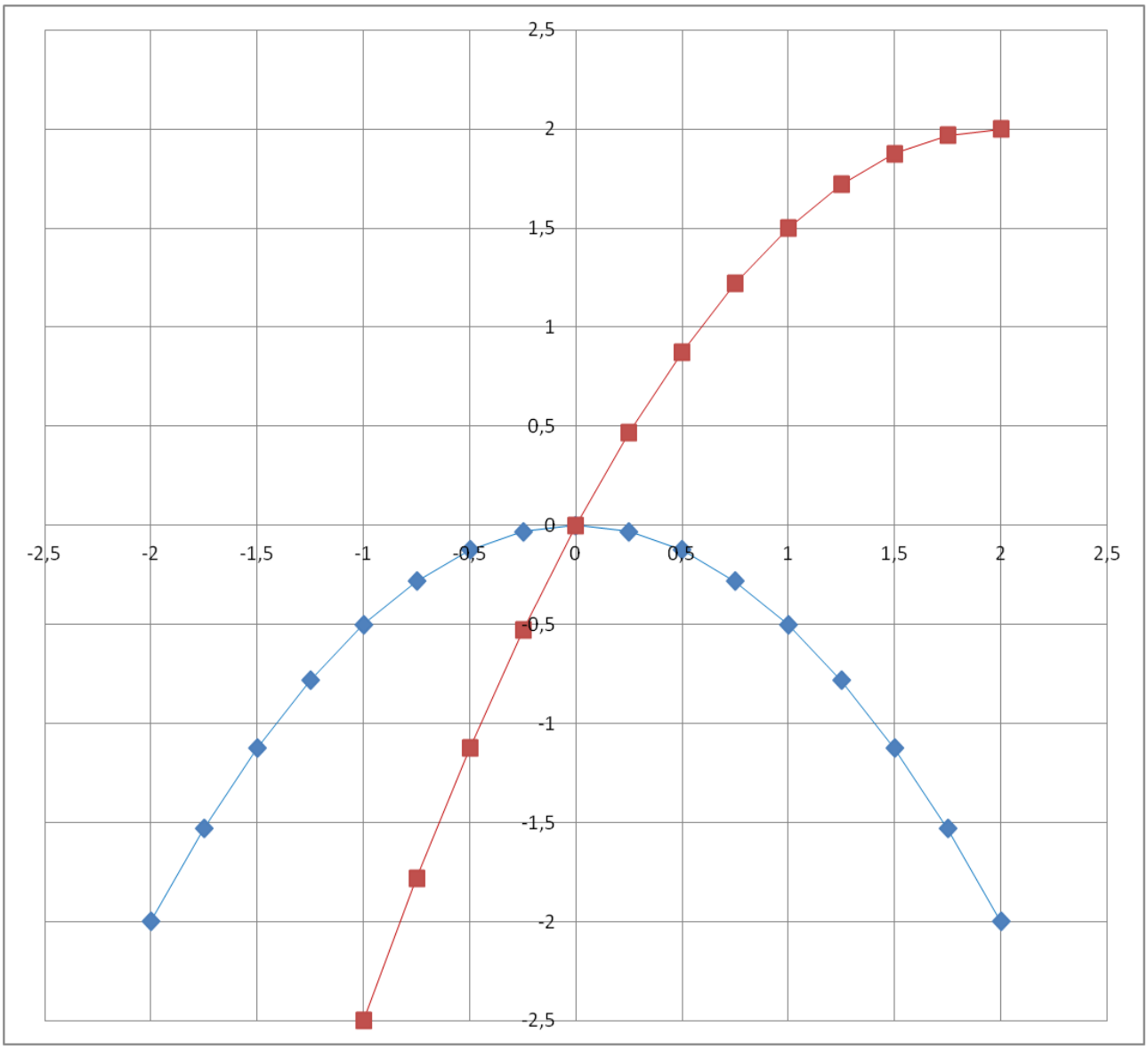



Für die Geschwindigkeit gibt es klare Beziehungen, die „nur noch“ mit viel „Golfgefühl“ umgesetzt werden müssen.

# Beispiel für ein reibungsfreies Grün

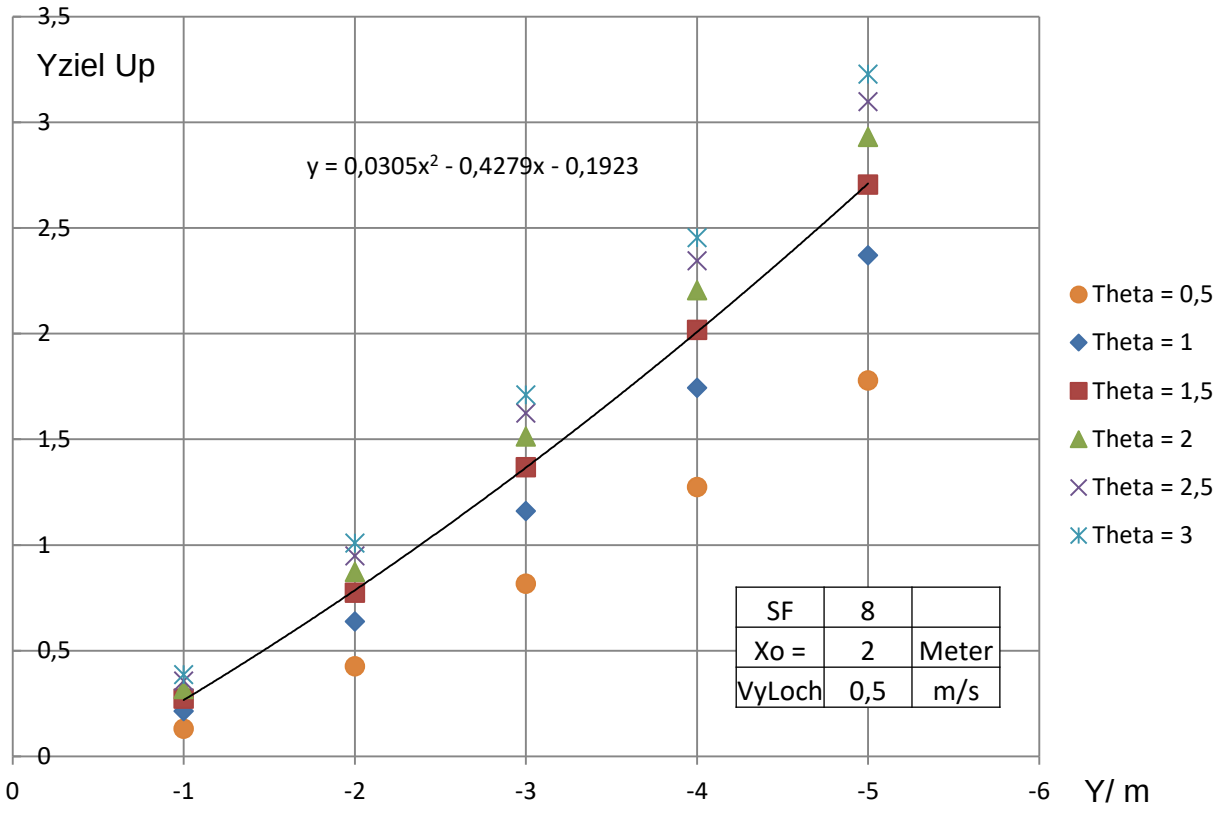
| UPHILL | | | DOWNHILL |
|---|---|---|---|
| 2,00 | x0 / Meter | 2,00 | |
| -2,00 | y0 / Meter | 2,00 | |
| -0,72 | vx0 m/sec | -0,72 | |
| 1,43 | vy0 m/sec | 0,00 | |
| -63,4 | Theta / Grad | 0,00 | |
| 3,00 | Phi / Grad | 3,00 | |

| 0,25 | deltaX | UPHILL | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 2,00 | 1,75 | 1,50 | 1,25 | 1,00 | 0,75 | 0,50 | 0,25 | 0,00 | -0,25 | -0,50 | -0,75 | -1,00 | -1,25 | -1,50 | -1,75 | -2,00 |
| y | -2,00 | -1,53 | -1,13 | -0,78 | -0,50 | -0,28 | -0,13 | -0,03 | 0,00 | -0,03 | -0,13 | -0,28 | -0,50 | -0,78 | -1,13 | -1,53 | -2,00 |
| t | 0,00 | 0,35 | 0,70 | 1,05 | 1,40 | 1,74 | 2,09 | 2,44 | 2,79 | 3,14 | 3,49 | 3,84 | 4,19 | 4,54 | 4,88 | 5,23 | 5,58 |
| dx/dt | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 |
| dy/dt | 1,43 | 1,25 | 1,07 | 0,90 | 0,72 | 0,54 | 0,36 | 0,18 | 0,00 | -0,18 | -0,36 | -0,54 | -0,72 | -0,90 | -1,07 | -1,25 | -1,43 |
| ds/dt | 1,60 | 1,44 | 1,29 | 1,15 | 1,01 | 0,90 | 0,80 | 0,74 | 0,72 | 0,74 | 0,80 | 0,90 | 1,01 | 1,15 | 1,29 | 1,44 | 1,60 |
| | | DOWNHILL | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x | 2,00 | 1,75 | 1,50 | 1,25 | 1,00 | 0,75 | 0,50 | 0,25 | 0,00 | -0,25 | -0,50 | -0,75 | -1,00 | -1,25 | -1,50 | -1,75 | -2,00 |
| y | 2,00 | 1,97 | 1,88 | 1,72 | 1,50 | 1,22 | 0,88 | 0,47 | 0,00 | -0,53 | -1,13 | -1,78 | -2,50 | -3,28 | -4,13 | -5,03 | -6,00 |
| t | 0,00 | 0,35 | 0,70 | 1,05 | 1,40 | 1,74 | 2,09 | 2,44 | 2,79 | 3,14 | 3,49 | 3,84 | 4,19 | 4,54 | 4,88 | 5,23 | 5,58 |
| dx/dt | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 | -0,72 |
| dy/dt | 0,00 | -0,18 | -0,36 | -0,54 | -0,72 | -0,90 | -1,07 | -1,25 | -1,43 | -1,61 | -1,79 | -1,97 | -2,15 | -2,33 | -2,51 | -2,69 | -2,87 |
| ds/dt | 0,72 | 0,74 | 0,80 | 0,90 | 1,01 | 1,15 | 1,29 | 1,44 | 1,60 | 1,76 | 1,93 | 2,10 | 2,27 | 2,44 | 2,61 | 2,78 | 2,95 |



# Beispiel für ein reibungsfreies Grün

Die Zielwerte auf der Y-Achse bei endlicher Puttgeschwindigkeit beim Uphill Fall folgen der u.a. Graphik.




Der Zielpunkt weicht also schon bei relativ kleinen Mindestgeschwindigkeiten vom theoretischen Idealfall Yziel = - Yo ab, der Downhill Fall bleibt für das reibungsfreie Grün beim Idealfall (da dort die Geschwindigkeit in y-Richtung durch die Gravitation bestimmt wird.

Ein realistischer Wert der „Einputtgeschwindigkeit“ liegt bei ca. 0,5 m/s – dann kann der Golfer damit rechnen dass bei einem nicht optimal ausgerichteten Versuch der Rückputt nicht allzu weit entfernt ist.

# 4. Der Putt mit konstanter Reibung – einfache Modell

Auf den Golfball in der x-y-Ebene wirken zwei Kräfte

1. Schwerkraft in w-Richtung mit Auswirkungen in der x-y-Ebene
   x-Achse: keine Schwerkraftwirkung, da per Definition die x-Achse so ausgerichtet ist, dass sie rechtwinklig zur w-Achse ist.
   y-Achse: ein Anteil proportional zum sin θ wirkt der Geschwindigkeit in y-Richtung entgegen bzw. beschleunigt zusätzlich

2. Konstante Reibungskraft in x-y-Ebene in beiden Achsen
   x-Achse: Reibung auf den Ball
   y-Achse: Reibung durch reduzierte Schwerkraftwirkung ~ cos θ
   Grenzfall: Senkrechte Ebene (θ = 90 Grad ) folgt keine Reibung da dann „freier Fall“ in y-Richtung

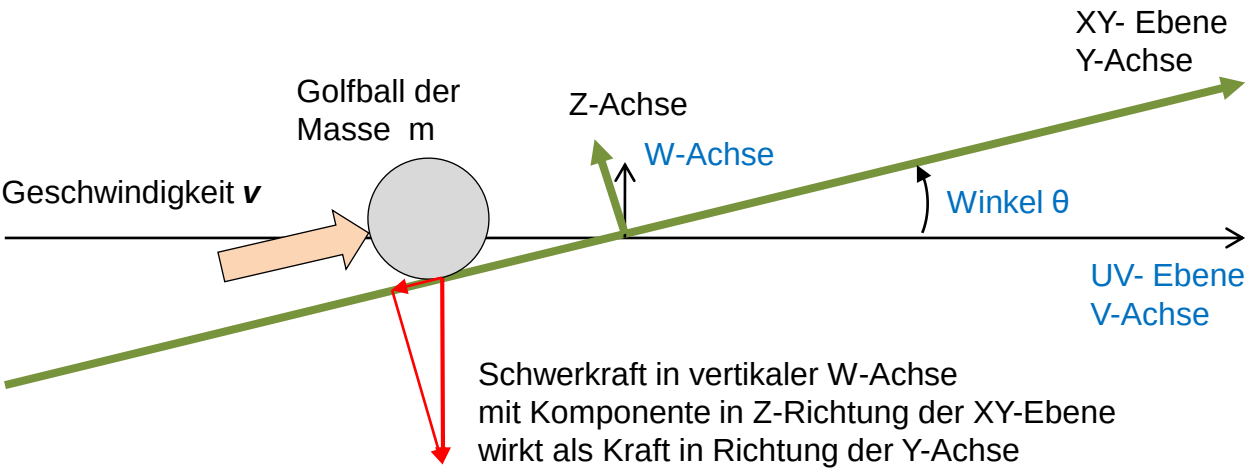
Somit die auf den Ball einwirkenden Kräfte

$\boldsymbol{F_R} = -\boldsymbol{e_u}\,\mu_R\, m\, g - \boldsymbol{e_v}\,\mu_R\, m\, g$ Reibungskraft in U, V Ebene

$\boldsymbol{F_R} = -\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, m\, g \cos\theta - \boldsymbol{e_y}\,\mu_R\, m\, g \cos\theta$

$\boldsymbol{F_S} = -\boldsymbol{e_w}\, m\, g$ Schwerkraft in negativer W-Richtung

$\boldsymbol{F_S} = -\boldsymbol{e_y}\, m\, g \sin\theta$




Die gesamten Kräfte in der XY-Ebene sind dann

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, m\, g - \boldsymbol{e_y}\,(\mu_R\, m\, g \cos\theta + m\, g \sin\theta)$$

Die Bewegungsgleichung des Golfballes lautet also

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = -\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, m\, g - \boldsymbol{e_y}\,(\mu_R\, m\, g \cos\theta + m\, g \sin\theta)$$

# Der Putt mit konstanter Reibung – einfache Modell

Damit die DGL der Geschwindigkeit

$$m \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, m\, g \cos\theta - \boldsymbol{e_y}\,(\mu_R\, m\, g \cos\theta + m\, g \sin\theta)$$

Integration ergibt direkt

$$\boldsymbol{V} = [\,-\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, g \cos\theta - \boldsymbol{e_y}\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t \;+\; \text{Int. Konstante}$$

Zum Zeitpunkt t = 0 startet der Ball mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{V_0}$
Somit die Lösung für die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_0} - [\,\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, g \cos\theta + \boldsymbol{e_y}\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t$$

Komponentenweise ergibt sich dann mit $\boldsymbol{V_0} = \mathbf{e_x}\, V_{x0} + \mathbf{e_y}\, V_{y0}$

(4.1) $\boldsymbol{V_x} = \mathbf{e_x}\,\{\, V_{x0} - [\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t\,\}$
(4.2) $\boldsymbol{V_y} = \mathbf{e_y}\,\{\, V_{y0} - [\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t\,\}$

Downhill von rechts oben:
$\boldsymbol{V_x} = V_{x0} + [\,\ldots\,]\, t$
$\boldsymbol{V_y} = V_{x0} + [\,\ldots - \ldots\,]\, t$

Und somit kann die DGL des Weges integriert werden

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \boldsymbol{V_0} - [\,\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, g \cos\theta + \boldsymbol{e_y}\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V_0}\, t \;-\; [\,\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, g \cos\theta + \boldsymbol{e_y}\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, \tfrac{1}{2}\, t^2 \;+\; \text{Int. Konstante}$$

Zum Zeitpunkt t = 0 startet der Ball vom Ort $\boldsymbol{R_0} = \mathbf{e_x}\, R_{x0} + \mathbf{e_y}\, R_{y0}$
Und somit die vollständige Lösung für den Weg

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_0} + \boldsymbol{V_0}\, t \;-\; \tfrac{1}{2}\,[\,\boldsymbol{e_x}\,\mu_R\, g \cos\theta + \boldsymbol{e_y}\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t^2$$

Komponentenweise in X und Y ergibt sich mit den Startwerten in $\boldsymbol{R_0}$ und $\boldsymbol{V_0}$

$\boldsymbol{R_0} = \mathbf{e_x}\, R_{x0} + \mathbf{e_y}\, R_{y0}$
$\boldsymbol{V_0} = \mathbf{e_x}\, V_{x0} + \mathbf{e_y}\, V_{y0}$

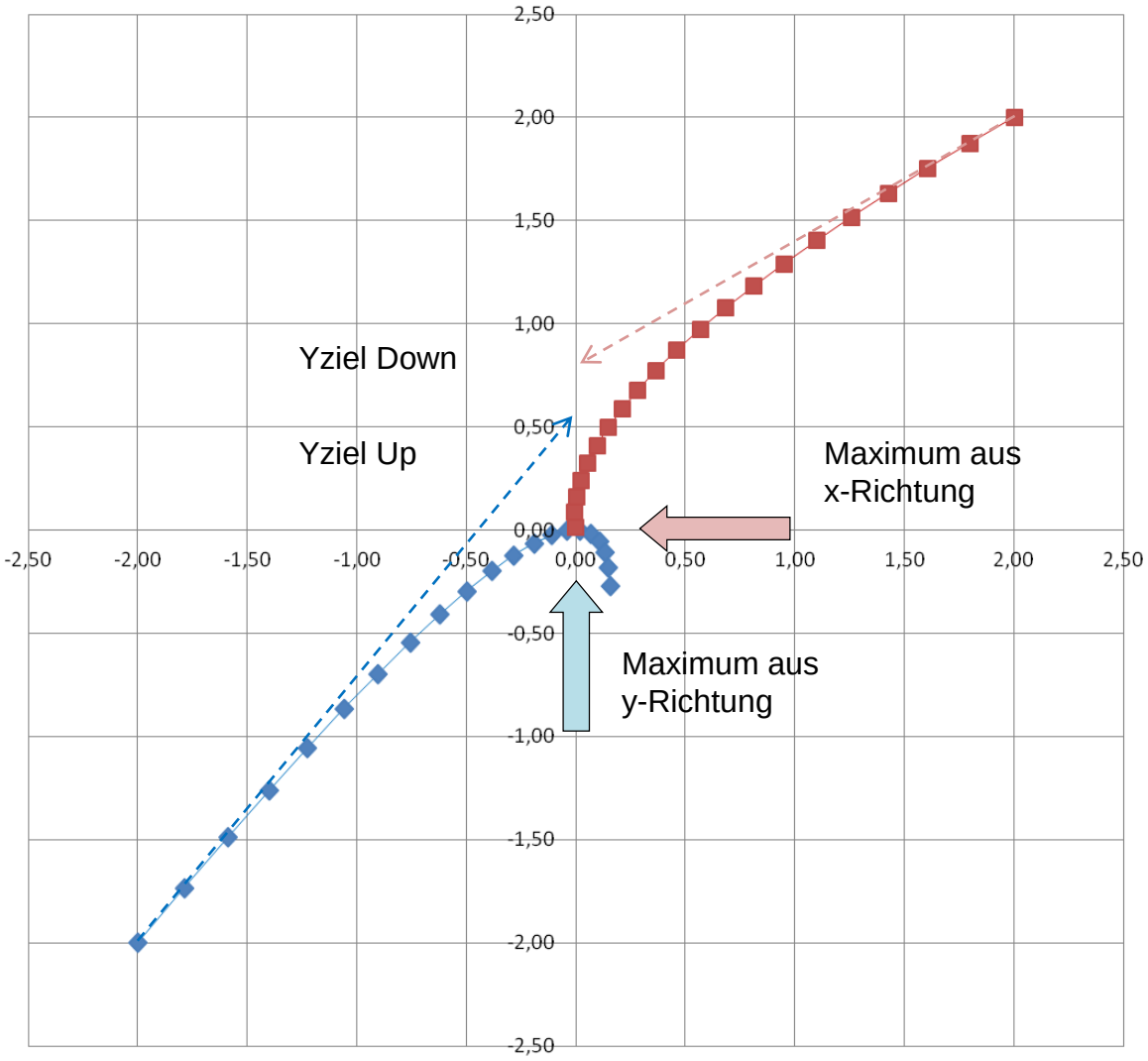
(4.3) $\boldsymbol{X} = \mathbf{e_x}\,\{\, R_{x0} + V_{x0}\, t \;-\; \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t^2\,\}$
(4.4) $\boldsymbol{Y} = \mathbf{e_y}\,\{\, R_{y0} + V_{y0}\, t \;-\; \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta\,]\, t^2\,\}$

Downhill von rechts oben:
$\boldsymbol{X} = R_{x0} + V_{x0}\, t + [\,\ldots\,]\, t^2$
$\boldsymbol{Y} = R_{x0} + V_{y0}\, t + [\,\ldots - \ldots\,]\, t^2$

Frage: Können diese Beziehungen die Wirklichkeit in allen Fällen wiedergeben ?
Nein, denn die Gleichungen sind physikalisch nur dann sinnvoll, wenn man von „unten“ mit positiven $\boldsymbol{V_y}$ einen Uphill Putt macht. ! Downhill ergibt sich analog.

# Der Putt mit konstanter Reibung – einfache Modell

Folgende Darstellung veranschaulicht den Weg eines Golfballes




Der Kurvenverlauf scheint „physikalisch sinnvoll“ zu sein, er stimmt mit der „gefühlten“ Realität überein. Beachten muss man dabei dass der Uphill Putt nach einer Zeit $T_{maxy}$ sein Maximum erreicht und danach als „Downhill“ Putt verläuft mit entsprechend angepassten Gleichungen (ähnliches beim Downhill Putt).
Die Zeit bis zum Maximum ergibt sich beim Uphill Putt aus Vy gleich Null, also

$$\boldsymbol{V_y} = \mathbf{e_y} \{ V_{y0} - [(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t \}$$
$$T_{maxy} = V_{y0} / (\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)$$

Ebenso die Zeit beim Downhill Putt aus Vx gleich Null, also

$$\boldsymbol{V_x} = \mathbf{e_x} \{ V_{x0} + [\, \mu_R\, g \cos\theta\, ]\, t \}$$
$$T_{maxx} = - \; V_{x0} / (\mu_R\, g \cos\theta)$$

Zur Bestimmung des „Einlochens“ beim Golf ist dies aber keine Einschränkung.

# Der Putt mit konstanter Reibung – einfache Modell

**UPHILL** :

Zur Ermittlung der optimalen Bedingungen für den Fall des Einlochens müssen folgende Randbedingungen bei den Gleichungen 4.1 … 4.4 erfüllt werden:

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad \boldsymbol{V}_y = 0$$

4.2 $$\boldsymbol{V}_y = V_{y0} - [\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t = 0$$

$$V_{y0} = [\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t$$

4.3 $$\boldsymbol{X} = R_{x0} + V_{x0}\, t - \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t^2 = 0$$

$$V_{x0} = -\,(R_{x0} - \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t^2\,) / t$$

4.4 $$\boldsymbol{Y} = R_{y0} + V_{y0}\, t - \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta\,]\, t^2 = 0$$

$$V_{y0} = -\,(\,R_{y0} - \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta\,]\, t^2\,) / t$$

Einsetzen der Geschwindigkeiten in y-Richtung

$$[\,(\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta)]\, t * t = -\,(\,R_{y0} - \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta\,]\, t^2\,)$$

Somit dann die Beziehung für die Zeit t bis zum einlochen

$$t_{putt} = \sqrt{-\,2\,R_{y0} / [\,\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta\,]} \qquad (4.5)$$

Damit dann die optimale Geschwindigkeit in y-Richtung

$$V_{y0} = \sqrt{-\,2\,R_{y0}\;[\,\mu_R\, g \cos\theta + g \sin\theta\,]} \qquad (4.6)$$

Die Geschwindigkeit in x-Richtung dann

$$V_{x0} = -\,(\,R_{x0} - \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t^2\,) / t$$

$$= -\,(R_{x0} - \tfrac{1}{2}\,[\,\mu_R g \cos\theta\,] \frac{(-\,2\,R_{y0})}{[\,\mu_R g \cos\theta + g \sin\theta\,]})\sqrt{\frac{\mu_R g \cos\theta + g \sin\theta}{-\,2\,R_{y0}}}$$

$$= -\,(\frac{R_{x0}\,[\mu_R g \cos\theta + g \sin\theta] + R_{y0}\,[\mu_R g \cos\theta]}{[\,\mu_R g \cos\theta + g \sin\theta\,]})\sqrt{\frac{\mu_R g \cos\theta + g \sin\theta}{-\,2\,R_{y0}}}$$

$$V_{x0} = -\,\frac{R_{x0}\,[\mu_R g \cos\theta + g \sin\theta] + R_{y0}\,[\mu_R g \cos\theta]}{\sqrt{-\,2\,R_{y0}\;[\mu_R g \cos\theta + g \sin\theta]}} \qquad (4.7)$$

Allgemein gilt für den Schnittpunkt bei x=0 auf der y-Achse für den Uphill Fall:

$$Y_{up} = -\,\frac{V_{y0}}{V_{x0}}\,R_{x0} + R_{y0} \qquad (4.8)$$

Einsetzen ergibt den Schnittpunkt

$$Y_{up} = -\,\frac{-\,2\,R_{y0}\,[\ldots+\ldots]\,R_{x0} + R_{y0}\,\{R_{x0}\,[\ldots+\ldots] + R_{y0}\,[\mu_R g \cos\theta]\}}{R_{x0}\,[\mu_R g \cos\theta + g \sin\theta] + R_{y0}\,[\mu_R g \cos\theta]}$$

# Der Putt mit konstanter Reibung – einfache Modell

**DOWNHILL**:

Zur Ermittlung der optimalen Bedingungen für den Fall des Einlochens müssen folgende Randbedingungen bei den Gleichungen 4.1 … 4.4 erfüllt werden:

$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad \boldsymbol{V}_x = 0$

Gl. 4.1 $\boldsymbol{V}_x = V_{x0} + [\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t = 0$

$V_{x0} = -[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t$

Gl. 4.3 $\boldsymbol{X} = R_{x0} + V_{x0}\, t + \tfrac{1}{2}[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t^2 = 0$

$V_{x0} = -(R_{x0} + \tfrac{1}{2}[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t^2) / t$

Gl. 4.4 $\boldsymbol{Y} = R_{y0} + V_{y0}\, t + \tfrac{1}{2}[\,\mu_R\, g \cos\theta - g \sin\theta\,]\, t^2 = 0$

$V_{y0} = -(R_{y0} + \tfrac{1}{2}[\,\mu_R\, g \cos\theta - g \sin\theta\,]\, t^2) / t$

Einsetzen der Geschwindigkeiten in x-Richtung

$\cancel{-}[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t * t = \cancel{-}(R_{x0} + \tfrac{1}{2}[\,\mu_R\, g \cos\theta\,]\, t^2)$

Somit dann die Beziehung für die Zeit t bis zum einlochen

$$t_{putt} = \sqrt{2\, R_{x0} / [\,\mu_R\, g \cos\theta\,]} \qquad \text{Lösung 1 mit optimaler Zeit} \qquad (4.9)$$

Damit ergibt sich dann direkt aus den obigen Beziehungen

$$V_{x0} = -(R_{x0} + \tfrac{1}{2}[\,\mu_R g \cos\theta\,]\, t^2) / t \qquad (4.19)$$

$$= -(R_{x0} + \tfrac{1}{2}[\,\mu_R g \cos\theta\,]\, 2\, R_{x0} / [\,\mu_R g \cos\theta\,]) / \sqrt{2\, R_{x0} / [\,\mu_R g \cos\theta\,]}$$

$$V_{x0} = \sqrt{2\, R_{x0}\, \mu_R g \cos\theta}$$

Die Geschwindigkeit in y-Richtung folgt aus

$$V_{y0} = -(R_{y0} + \tfrac{1}{2}[\,\mu_R\, g \cos\theta - g \sin\theta\,]\, t^2) / t \qquad \text{mit} \quad t = t_{putt} \qquad (4.11)$$

Eine zweite Lösungsmöglichkeit für den Downhill Putt erhält man, wenn man dieselbe Zeit t wie im Uphill Fall ansetzt, d.h auch gleiche Geschwindigkeit in X-Richtung . Damit ergeben sich weitere Lösungen auch für $V_x$ und $V_y$.

Somit ergeben sich zwei Zielpunkte auf der Y-Achse gem. Gleichung 4.8

Beachte: die zweite Lösungsmöglichkeit ist auf Grund der höheren $V_x$ und $V_y$ nicht optimal. Wenn man das Loch verpasst rollt der Ball unnötig weit über das Loch hinaus.

# Der Putt mit konstanter Reibung – einfache Modell – Beispiel

| UPHILL | | |
|---|---|---|
| xup | -2,00 | m |
| yup | -2,00 | m |
| vxup | 1,72 | m/s |
| vyup | 2,19 | m/s |
| Theta | 3,00 | Grad |
| MüR | 0,07 | |

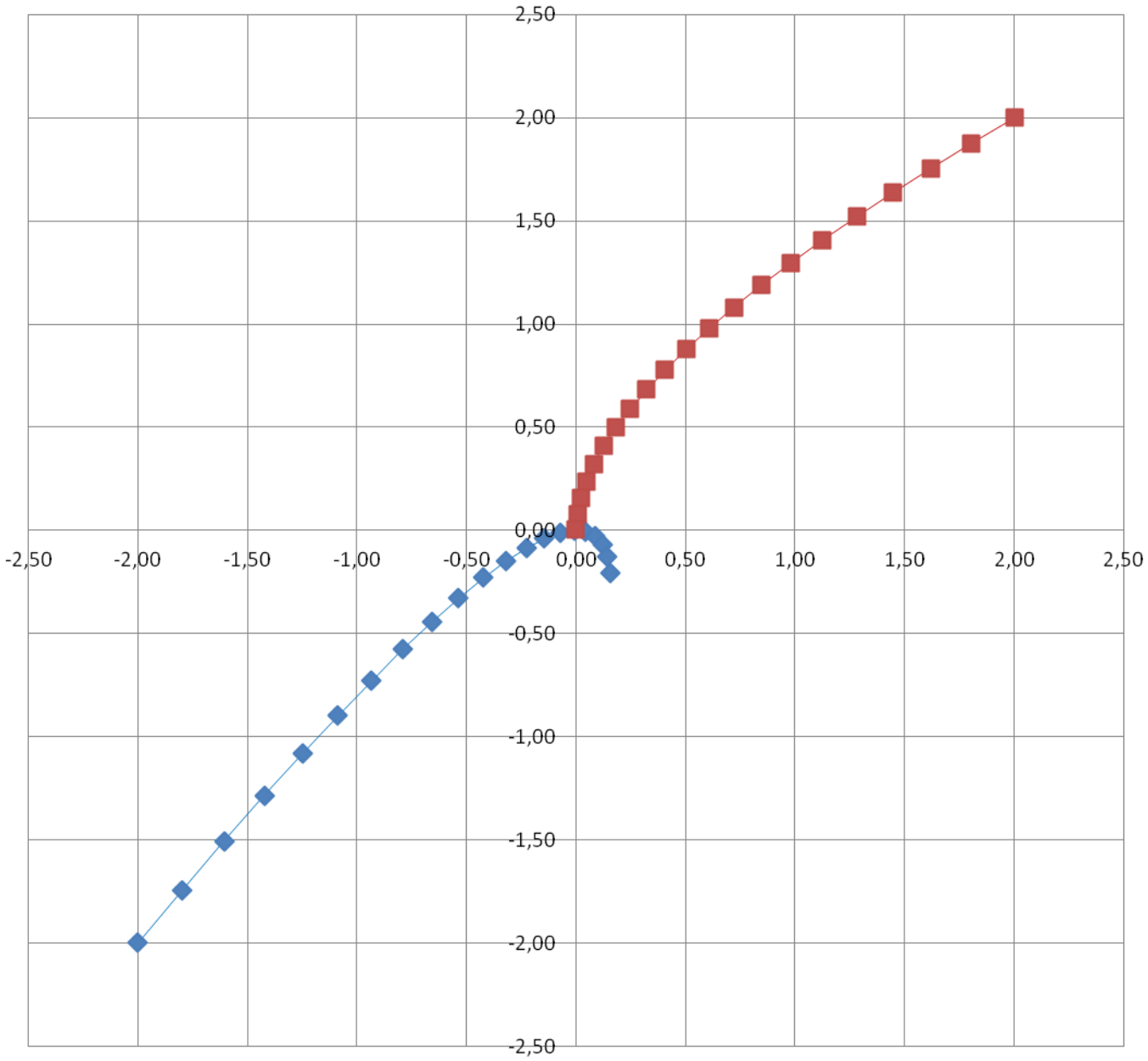
| Δ t | 0,121 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 0,00 | 0,12 | 0,24 | 0,36 | 0,48 | 0,60 | 0,72 | 0,84 | 0,96 | 1,09 | 1,21 | 1,33 | 1,45 | 1,57 | 1,69 | 1,81 | 1,93 | 2,05 | 2,17 | 2,29 | 2,41 |
| x | -2,00 | -1,80 | -1,60 | -1,42 | -1,25 | -1,09 | -0,93 | -0,79 | -0,66 | -0,54 | -0,42 | -0,32 | -0,23 | -0,14 | -0,07 | -0,01 | 0,04 | 0,09 | 0,12 | 0,14 | 0,16 |
| y | -2,00 | -1,74 | -1,51 | -1,29 | -1,08 | -0,90 | -0,73 | -0,58 | -0,45 | -0,33 | -0,23 | -0,15 | -0,09 | -0,04 | -0,01 | 0,00 | -0,01 | -0,03 | -0,07 | -0,13 | -0,21 |
| dx/dt | 1,72 | 1,64 | 1,56 | 1,47 | 1,39 | 1,31 | 1,23 | 1,14 | 1,06 | 0,98 | 0,89 | 0,81 | 0,73 | 0,65 | 0,56 | 0,48 | 0,40 | 0,32 | 0,23 | 0,15 | 0,07 |
| dy/dt | 2,19 | 2,05 | 1,90 | 1,76 | 1,61 | 1,47 | 1,32 | 1,18 | 1,03 | 0,89 | 0,74 | 0,60 | 0,45 | 0,31 | 0,17 | 0,02 | -0,12 | -0,27 | -0,41 | -0,56 | -0,70 |
| ds/dt | 2,79 | 2,62 | 2,46 | 2,29 | 2,13 | 1,97 | 1,80 | 1,64 | 1,48 | 1,32 | 1,16 | 1,01 | 0,86 | 0,72 | 0,59 | 0,48 | 0,42 | 0,41 | 0,47 | 0,58 | 0,71 |
| YuZiel | 0,545 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| tmaxy | 1,826 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| Tputt | 1,826 | Vyupputt | 2,190 | Vxupputt | 1,721 | Yupputt | 0,545 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| DOWNHILL | | |
|---|---|---|
| xd | 2 | m |
| yd | 2 | m |
| vxd | -1,66 | m/s |
| vyd | -1,04 | m/s |

| x | 2,00 | 1,81 | 1,62 | 1,45 | 1,28 | 1,13 | 0,98 | 0,85 | 0,72 | 0,61 | 0,50 | 0,41 | 0,32 | 0,25 | 0,18 | 0,13 | 0,08 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2,00 | 1,88 | 1,76 | 1,64 | 1,52 | 1,41 | 1,30 | 1,19 | 1,08 | 0,98 | 0,88 | 0,78 | 0,68 | 0,59 | 0,50 | 0,41 | 0,32 | 0,24 | 0,16 | 0,08 | 0,00 |
| dx/dt | -1,66 | -1,57 | -1,49 | -1,41 | -1,33 | -1,24 | -1,16 | -1,08 | -0,99 | -0,91 | -0,83 | -0,75 | -0,66 | -0,58 | -0,50 | -0,42 | -0,33 | -0,25 | -0,17 | -0,08 | 0,00 |
| dy/dt | -1,04 | -1,02 | -0,99 | -0,97 | -0,95 | -0,93 | -0,91 | -0,89 | -0,87 | -0,85 | -0,83 | -0,81 | -0,79 | -0,77 | -0,75 | -0,72 | -0,70 | -0,68 | -0,66 | -0,64 | -0,62 |
| ds/dt | 1,95 | 1,87 | 1,79 | 1,71 | 1,63 | 1,55 | 1,48 | 1,40 | 1,32 | 1,25 | 1,17 | 1,10 | 1,03 | 0,96 | 0,90 | 0,84 | 0,78 | 0,73 | 0,68 | 0,65 | 0,62 |
| YdZiel | 0,749 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| tmaxx | 2,412 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| L1: | Tputt | 2,415 | Vydputt | -1,04 | Vxdputt | -1,66 | Ydputt | 0,749 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L2: | Tputt | 1,826 | Vydputt | -1,25 | Vxdputt | -1,72 | Ydputt | 0,545 |

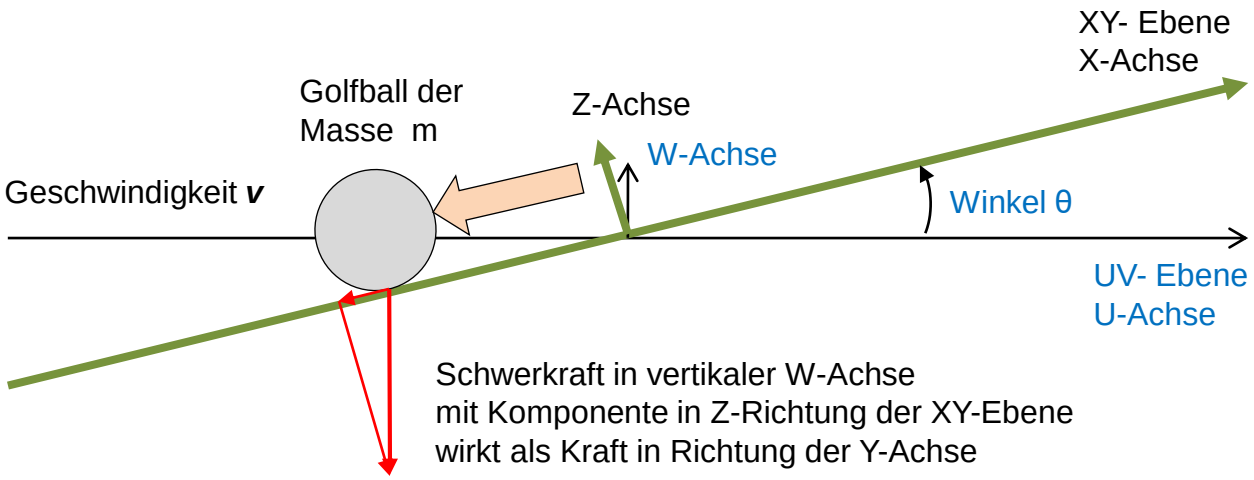


## 5. Putt mit konstanter Reibungskraft

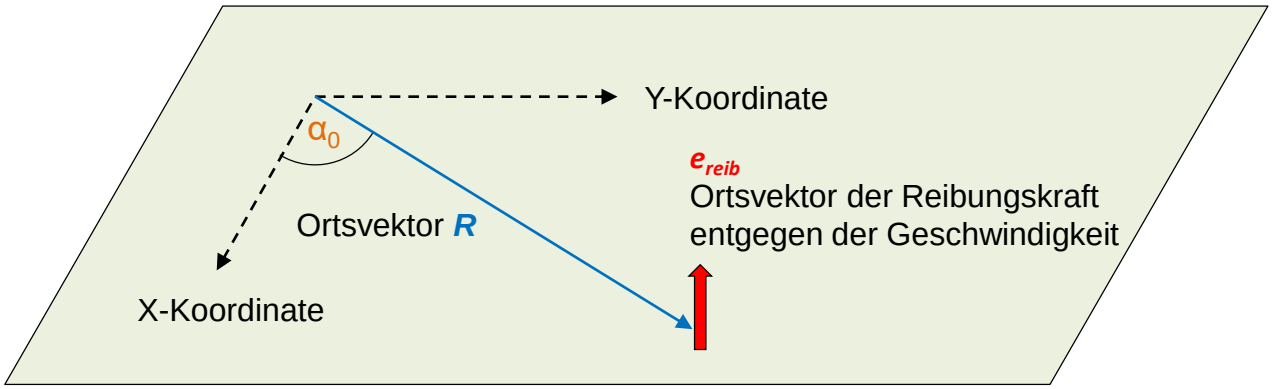
Auf den Golfball in der x-y-Ebene wirken zwei Kräfte

1. Schwerkraft in w-Richtung mit Auswirkungen in der x-y-Ebene
   y-Achse: keine Schwerkraftwirkung, da per Definition die y-Achse so ausgerichtet ist, dass sie rechtwinklig zur w-Achse ist.
   x-Achse: ein Anteil proportional zum sin θ wirkt der Geschwindigkeit in x-Richtung entgegen bzw. beschleunigt zusätzlich

2. Konstante Reibungskraft $\mu_R$ entgegen der Bewegungsrichtung des Golfballes
   $\boldsymbol{e_{roll}}$: Einheitsvektor der Bewegungsrichtung $\mathbf{e_x}$ cos α + $\mathbf{e_y}$ sin α
   Reduzierte Reibung durch leicht reduzierte Schwerkraft ~ cos θ




Der Golfball bewegt sich mit seinem Ortsvektor ***R*** entlang seiner Bahnlinie mit der Geschwindigkeit ***V*** unter einem Winkel α




Die Newton'sche Bewegungsgleichung des Golfballes mit der Ortskoordinate ***R*** lautet

$$m \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{e_x}\, m\, g \sin\theta - \boldsymbol{e_{roll}}\ \mu_R\, m\, g \cos\theta \qquad (5.1)$$

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Die Newton'schen Gleichungen in den X-Y Koordinaten ergeben sich mit $\boldsymbol{e_{roll}}$

$$m \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{e_x}\, m\, g \sin\theta - \boldsymbol{e_{roll}}\ \mu_R\, m\, g \cos\theta$$

$$= \boldsymbol{e_x}\, m\, g \sin\theta - \mu_R\, m\, g \cos\theta \{\boldsymbol{e_x} \cos\alpha + \boldsymbol{e_y} \sin\alpha\}$$

$$= \boldsymbol{e_x}\, m\, g \sin\theta - \boldsymbol{e_x}\, \mu_R\, m\, g \cos\theta \cos\alpha - \boldsymbol{e_y}\, \mu_R\, m\, g \cos\theta \sin\alpha$$

$$= -\boldsymbol{e_y}\, \mu_R\, m\, g \cos\theta \sin\alpha + \boldsymbol{e_x}\, m\, g \sin\theta \{1 - \mu_R \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cos\alpha\}$$

$$= -\boldsymbol{e_y}\, \mu_R\, m\, g \sin\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \sin\alpha + \boldsymbol{e_x}\, m\, g \sin\theta \{1 - \mu_R \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cos\alpha\}$$

zur Abkürzung setze $M = \mu_R \cot\theta$

$$m \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = m\, g \sin\theta \{\boldsymbol{e_x} (1 - M \cos\alpha) - \boldsymbol{e_y}\, M \sin\alpha\} \qquad (5.2)$$

Die tangentiale Bewegungsgleichung $\boldsymbol{T}$ des Ortsvektors $\boldsymbol{R}$ ergibt sich durch $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{e_{roll}}$

$$m \frac{d^2\boldsymbol{T}}{dt^2} = m\, g \sin\theta \{-M \sin\alpha \sin\alpha + (1 - M \cos\alpha) \cos\alpha\}$$

$$m \frac{d^2\boldsymbol{T}}{dt^2} = m\, g \sin\theta \{-M \sin^2\alpha + (\cos\alpha - M \cos^2\alpha)\}$$

$$m \frac{d^2\boldsymbol{T}}{dt^2} = m\, g \sin\theta (\cos\alpha - M)$$

Summation von $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{T}$ ergibt

$$m \frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2} + M\, m \frac{d^2\boldsymbol{T}}{dt^2} = m\, g \sin\theta (1 - M \cos\alpha) + M\, m\, g \sin\theta [\cos\alpha - M]$$

$$= m\, g \sin\theta [1 - M \cos\alpha + M \cos\alpha - M^2]$$

$$\int [\ldots]\, dt = \int m\, g \sin\theta [1 - M^2]\, dt$$

diese Gleichung kann direkt integriert werden (da die rechte Seite konstant ist)

$$dX/dt + M\, dT/dt = g \sin\theta [1 - M^2]\, t + \text{Konstante}$$

Zum Zeitpunkt t = 0 startet der Ball mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}_0$ und dem Winkel $\alpha_0$
Somit ergibt sich die Konstante zu $\boldsymbol{V}_0 \cos\alpha_0 + M\, \boldsymbol{V}_0$

$$\boldsymbol{V} \cos\alpha + M\, \boldsymbol{V} = g \sin\theta [1 - M^2]\, t + \boldsymbol{V}_0 [M + \cos\alpha_0]$$

somit eine Funktion für die Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = \frac{g \sin\theta (1 - M^2)\, t + \boldsymbol{V}_0 (M + \cos\alpha_0)}{M + \cos\alpha} \qquad (5.3)$$

$$V_x = V \cos\alpha \qquad (5.4)$$

$$V_y = V \sin\alpha \qquad (5.5)$$

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Die Geschwindigkeitskomponenten in X und Y Richtung bilden den Winkel α

$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{dY/dt}{dX/dt}$$

$$\alpha = \arctan\left[\frac{dY/dt}{dX/dt}\right]$$

Differenzieren und Anwendung der Quotientenregel ergibt Beziehung für α

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+[\ldots]^2}\,\frac{d^2Y/dt^2\; dX/dt \;-\; d^2X/dt^2\; dY/dt}{(\,dX/dt\,)^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+(\tan\alpha)^2}\,\frac{d^2Y/dt^2 - d^2X/dt^2\; dY/dt \,/\, dX/dt}{dX/dt}$$

Einsetzen von Gl. 5.1/2 und 5.4 ergibt

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}\,\frac{g\sin\theta\,[(1-M\sin\alpha)+M\cos\alpha\tan\alpha\,](M+\cos\alpha)}{[g\sin\theta\,(1-M^2)\,t + V_0\,(M+\cos\alpha_0)]\cos\alpha}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\,\frac{g\sin\theta\,[\,1-M\sin\alpha-M\cos\alpha\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,](M+\cos\alpha)}{[g\sin\theta\,(1-M^2)\,t + V_0\,(M+\cos\alpha_0)]\sin\alpha}$$

Somit folgt dann eine Beziehung für den Lauf-/ Rollwinkel α

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-\,g\sin\theta\sin\alpha\,(M+\cos\alpha)}{g\sin\theta\,(1-M^2)\,t + V_0\,(M+\cos\alpha_0)} \qquad (5.6)$$

Trennen der Variablen in t und α ergibt Möglichkeit zur Integration

$$\int \frac{-\,d\alpha}{g\sin\theta\sin\alpha\,(M+\cos\alpha)} = \int \frac{dt}{g\sin\theta\,(1-M^2)\,t + V_0\,(M+\cos\alpha_0)}$$

Multiplikation beider Seiten mit $g\sin\theta\,(1-M^2)$ ergibt

$$\int \frac{-\,g\sin\theta\,(1-M^2)\,d\alpha}{g\sin\theta\sin\alpha\,(M+\cos\alpha)} = \int \frac{g\sin\theta\,(1-M^2)\,dt}{g\sin\theta\,(1-M^2)\,t + V_0\,(M+\cos\alpha_0)} \qquad (5.7)$$

Die rechte zeitliche Seite ist ein einfaches Integral der rationalen Funktion in t

$$\int \frac{a\,dt}{at+b} = \mathrm{LogN}\,[\,g\sin\theta\,(1-M^2)\,t + V_0\,(M+\cos\alpha_0)\,]$$

und ergibt in den Grenzen zwischen t = 0 und t die Zeit Funktion zu

$$\int_{t=0}^{t} \ldots\,dt = \mathrm{LogN}\left[\frac{g\sin\theta\,(1-M^2)\,t + V_0\,(M+\cos\alpha_0)}{V_0\,(M+\cos\alpha_0)}\right] \qquad (5.8)$$

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Die linke Seite der Gl. 5.7 ist ein rationaler Bruch trigonometrischer Funktionen, der nach Erweiterung mit einer Substitution in einen Partialbruch zerlegt werden kann.

$$\int \frac{-(1-M^2)\,d\alpha}{(M+\cos\alpha)\sin\alpha} = \int \frac{-(1-M^2)\sin\alpha\,d\alpha}{(M+\cos\alpha)\sin^2\alpha} = \int \frac{-(1-M^2)\sin\alpha\,d\alpha}{(M+\cos\alpha)(1-\cos^2\alpha)}$$

Substitution: $u = \cos\alpha \quad du = -\sin\alpha\,d\alpha$

Damit folgt dann

$$\int \ldots d\alpha = \int \frac{(1-M^2)\,du}{(M+u)(1-u^2)} = \int \frac{(M^2-1)\,du}{(u+M)(u^2-1)}$$

$$\int \ldots d\alpha = (M^2-1)\int \left[\frac{A\,du}{(u+M)} + \frac{B\,du}{(u+1)} + \frac{C\,du}{(u-1)}\right]$$

Der Zähler ergibt sich zu

$$Z = A(u+1)(u-1) + B(u+M)(u-1) + C(u+M)(u+1)$$

$$Z = A(u^2-1) + B(u^2 - u + Mu - M) + C(u^2 + u + Mu + M)$$

$$Z = Au^2 - A + Bu^2 - Bu + BMu - BM + Cu^2 + Cu + CMu + CM$$

$$Z = u^2(A+B+C) + u(BM - B + CM + C) + (-A - BM + CM)$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$0 = A + B + C$ $\qquad A = -(B+C)$

$0 = BM - B + CM + C$ $\qquad = B(M-1) + C(M+1)$ $\qquad B = -C(M+1)/(M-1)$

$1 = -A - BM + CM$

A und B einsetzen in die dritte Gleichung

$$1 = B + C + C(M+1)/(M-1)M + CM$$

$$1 = -C(M+1)/(M-1) + C + C(M+1)/(M-1)M + CM$$

$$1 = -C(M+1)/(M-1) + C(M-1)/(M-1) + C(M+1)/(M-1)M + CM(M-1)/(M-1)$$

$$1 = \frac{1}{(M-1)}\left(-CM - C + CM - C + CM^2 + CM + CM^2 - CM\right) = \frac{-2C + 2CM^2}{(M-1)}$$

$$(M-1) = 2C(M^2-1) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{(M-1)}{2(M^2-1)}$$

$$B = -\frac{(M-1)(M+1)}{2(M^2-1)(M-1)} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{-(M+1)}{2(M^2-1)}$$

$$A = -(B+C) = -\frac{-(M+1) + (M-1)}{2(M^2-1)} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{(M^2-1)}$$

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Jetzt lässt sich das Integral wie folgt schreiben

$$\int \dots d\alpha = \int \frac{du}{u+M} - \frac{(1+M)\,du}{2(1+u)} + \frac{(1-M)\,du}{2(1-u)}$$

Dies sind Integrale der rationalen Funktion (ax+b) mit der Lösung

$$\int \dots d\alpha = \text{LogN}\,|u+M| - 0{,}5(1+M)\,\text{LogN}|1+u| + 0{,}5(1-M)\,(-1)\,\text{LogN}|1-u|$$

$$\int \dots d\alpha = \text{LogN}\,|\cos\alpha + M| - 0{,}5\,\text{LogN}\,|1+\cos\alpha| - 0{,}5\,\text{LogN}\,|1+\cos\alpha|^M - 0{,}5\,\text{LogN}\,|1-\cos\alpha| + 0{,}5\,\text{LogN}\,|1-\cos\alpha|^M$$

$$\int \dots d\alpha = \text{LogN}\left[ (M+\cos\alpha)\,\frac{1}{\sqrt{(1+\cos\alpha)}\,\sqrt{(1-\cos\alpha)}}\,\frac{\sqrt{(1-\cos\alpha)}^M}{\sqrt{(1+\cos\alpha)}^M} \right]$$

>>> $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\sin^2\alpha}$ >>> $\sin\alpha$ $\qquad$ $(\tan\alpha/2)^M$

Mit u = cos α ergibt sich in den Grenzen vom Startwert $\alpha_0$ bis Endwert α

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \dots d\alpha = \text{LogN}\,\frac{(M+\cos\alpha)\,\sin\alpha_0\;(\tan\alpha/2)^M}{\sin\alpha\,(M+\cos\alpha_0)\,(\tan\alpha_0/2)^M} \qquad (5.9)$$

Somit ergibt sich die Lösung der Gleichung (5.7) mit 5.8 und 5.9 wie folgt

$$\frac{(M+\cos\alpha)\,\sin\alpha_0\;(\tan\alpha/2)^M}{\sin\alpha\,(M+\cos\alpha_0)\,(\tan\alpha_0/2)^M} = \frac{g\sin\theta\,(1-M^2)\,t + \boldsymbol{V}_0\,(M+\cos\alpha_0)}{\boldsymbol{V}_0\,(M+\cos\alpha_0)}$$

Die Zeitfunktion in der parametrischen Darstellung in α

$$t = \frac{\boldsymbol{V}_0\,(M+\cos\alpha_0)}{g\sin\theta\,(1-M^2)}\left[ \frac{(M+\cos\alpha)\,\sin\alpha_0\;(\tan\alpha/2)^M}{\sin\alpha\,(M+\cos\alpha_0)\,(\tan\alpha_0/2)^M} - 1 \right] \qquad (5.10)$$

Einsetzen dieser Zeitbeziehung in 5.4 und 5.5 ergibt die $\boldsymbol{V}_x$ / $\boldsymbol{V}_y$ Geschwindigkeiten

$$\boldsymbol{V}_x = \frac{\{\,g\sin\theta\,(1-M^2)\,\frac{\boldsymbol{V}_0\,(M+\cos\alpha_0)}{g\sin\theta\,(1-M^2)}\,[\,\dots - 1\,] + \boldsymbol{V}_0\,(M+\cos\alpha_0)\,\}\cos\alpha}{(M+\cos\alpha)}$$

$$\boldsymbol{V}_x = \boldsymbol{V}_0\cos\alpha\,\frac{(M+\cos\alpha_0)}{(M+\cos\alpha)}\,[\,\dots\,] \qquad (5.11)$$

und analog

$$\boldsymbol{V}_y = \boldsymbol{V}_0\sin\alpha\,\frac{(M+\cos\alpha_0)}{(M+\cos\alpha)}\,[\,\dots\,] \qquad (5.12)$$

Dabei ist die eckige Klammer

$$[\,\dots\,] = \frac{(M+\cos\alpha)\,\sin\alpha_0\;(\tan\alpha/2)^M}{\sin\alpha\,(M+\cos\alpha_0)\,(\tan\alpha_0/2)^M} \qquad (5.13)$$

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Zur Bestimmung der parametrischen Ortskomponenten in x und y Richtung muss die durch Gl. 5.11/12 gegebene Winkelabhängigkeit wie folgt dargestellt werden

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx(\alpha)}{d\alpha}\,\frac{d\alpha(t)}{dt} \qquad >>> \qquad \frac{dx(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dx}{dt} \Big/ \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

Dabei beschreibt Gl. 5.6 die Winkelabhängigkeit von der Zeit aus Gl. 5.10

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-\,g \sin\theta \sin\alpha\,(M + \cos\alpha)}{g \sin\theta\,(1 - M^2)\,\dfrac{\boldsymbol{V}_0\,(M + \cos\alpha_0)}{g \sin\theta\,(1 - M^2)}\,\Big[\ldots - 1\Big] + \boldsymbol{V}_0\,(M + \cos\alpha_0)}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\,\frac{g \sin\theta \sin\alpha\,(M + \cos\alpha)}{\boldsymbol{V}_0\,(M + \cos\alpha_0)\,[\ldots]}$$

Mit Gleichung 5.11 bzw. 5.12 folgt dann

$$\frac{dx(\alpha)}{d\alpha} = \boldsymbol{V}_0 \cos\alpha\,\frac{(M + \cos\alpha_0)}{(M + \cos\alpha)}\,[\ldots]\,\frac{\boldsymbol{V}_0\,(M + \cos\alpha_0)\,[\ldots]}{-\,g \sin\theta \sin\alpha\,(M + \cos\alpha)}$$

Somit die zu integrierenden parametrischen Gleichungen für x(α) und y(α)

$$\frac{dx(\alpha)}{d\alpha} = -\cos\alpha\,\frac{(V_0)^2(M + \cos\alpha_0)^2}{g \sin\theta \sin\alpha\,(M + \cos\alpha)^2}\,[\ldots]^2 \qquad (5.14)$$

$$\frac{dy(\alpha)}{d\alpha} = -\sin\alpha\,\frac{(V_0)^2(M + \cos\alpha_0)^2}{g \sin\theta \sin\alpha\,(M + \cos\alpha)^2}\,[\ldots]^2 \qquad (5.15)$$

Dabei ist die „eckige Klammer“ gemäß Gl 5.13 zu verwenden.

$$\frac{\begin{matrix}dx(\alpha)\\ dy(\alpha)\end{matrix}}{d\alpha} = -\,\frac{\begin{matrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{matrix}}{}\,\frac{(V_0)^2(M + \cos\alpha_0)^2}{g \sin\theta \sin\alpha\,(M + \cos\alpha)^2}\left[\frac{(M + \cos\alpha)\sin\alpha_0}{\sin\alpha\,(M + \cos\alpha_0)}\,\frac{(\tan\alpha/2)^M}{(\tan\alpha_0/2)^M}\right]^2$$

$$\int \begin{matrix}dx(\alpha)\\ dy(\alpha)\end{matrix} = -\int \begin{matrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{matrix}\,\frac{(V_0)^2\ \sin^2\alpha_0}{g \sin\theta \sin\alpha \sin^2\alpha}\,\frac{(\tan\alpha/2)^{2M}}{(\tan\alpha_0/2)^{2M}}\,d\alpha$$

Einsetzen der Universalsubstitution ergibt zwei Integrale für x und y

Mit $u = \tan\frac{\alpha}{2}$ folgt $d\alpha = \frac{2\,du}{1 + u^2}$ $\sin\alpha = \frac{2u}{1 + u^2}$ $\cos\alpha = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Lösen des Integrals in y-Richtung:

$$\int dy(\alpha) = -\int \frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0}{g \sin\theta} \frac{(\tan\alpha/2)^{2M}}{\sin^2\alpha \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}} \, d\alpha$$

$$\int dy(\alpha) = -\int \frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0}{g \sin\theta \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}} \frac{u^{2M}}{[2u/(1+u^2)]^2} \frac{2 \, du}{[1+u^2]} \frac{[1+u^2]}{[1+u^2]}$$

erweitern und kürzen

$$\int dy(\alpha) = -\frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0}{2 \, g \sin\theta \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}} \int ( u^{2M-2} + u^{2M}) \, du$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} dy(\alpha) = -\frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0}{2 \, g \sin\theta \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}} \left[ \frac{1}{2M-1} \, u^{2M-1} + \frac{1}{2M+1} \, u^{2M+1} \right] \Bigg|_{\alpha_0}^{\alpha}$$

In den Grenzen vom Startwert $\alpha_0$ bis Endwert $\alpha$ ergibt sich somit $y(\alpha)$ zu

$$y(\alpha) = \underbrace{-\frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0}{2 \, g \sin\theta \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}}}_{\text{Konstante}} \left[ \frac{(\tan\alpha/2)^{2M-1}}{2M-1} + \frac{(\tan\alpha/2)^{2M+1}}{2M+1} - \frac{(\tan\alpha_0/2)^{2M-1}}{2M-1} - \frac{(\tan\alpha_0/2)^{2M+1}}{2M+1} \right]$$

(5.16)

Analog erhält man das Integral in x-Richtung

$$\int dx(\alpha) = -\int \frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0 \cos\alpha \ (\tan\alpha/2)^{2M}}{g \sin\theta \sin\alpha \sin^2\alpha \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}} \, d\alpha$$

$$\int dx(\alpha) = -\int \frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0 \ (1-u^2)/(1+u^2) \ u^{2M}}{g \sin\theta \ (\tan\alpha_0/2)^{2M} \ [2u/(1+u^2)] \ [2u/(1+u^2)]^2} \frac{2 \, du}{[1+u^2]} \frac{[1+u^2]}{[1+u^2]}$$

$$\frac{2 \, [1-u^4] \, u^{2M} \, du}{8 \, u^3}$$

erweitern und kürzen

$$\int dx(\alpha) = -\frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0}{4 \, g \sin\theta \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}} \int ( u^{2M-3} - u^{2M+1}) \, du$$

$$\int dx(\alpha) = -\frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0}{4 \, g \sin\theta \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}} \left[ \frac{1}{2M-2} \, u^{2M-2} - \frac{1}{2M+2} \, u^{2M+2} \right] \Bigg|_{\alpha_0}^{\alpha}$$

In den Grenzen vom Startwert $\alpha_0$ bis Endwert $\alpha$ ergibt sich somit $x(\alpha)$ zu

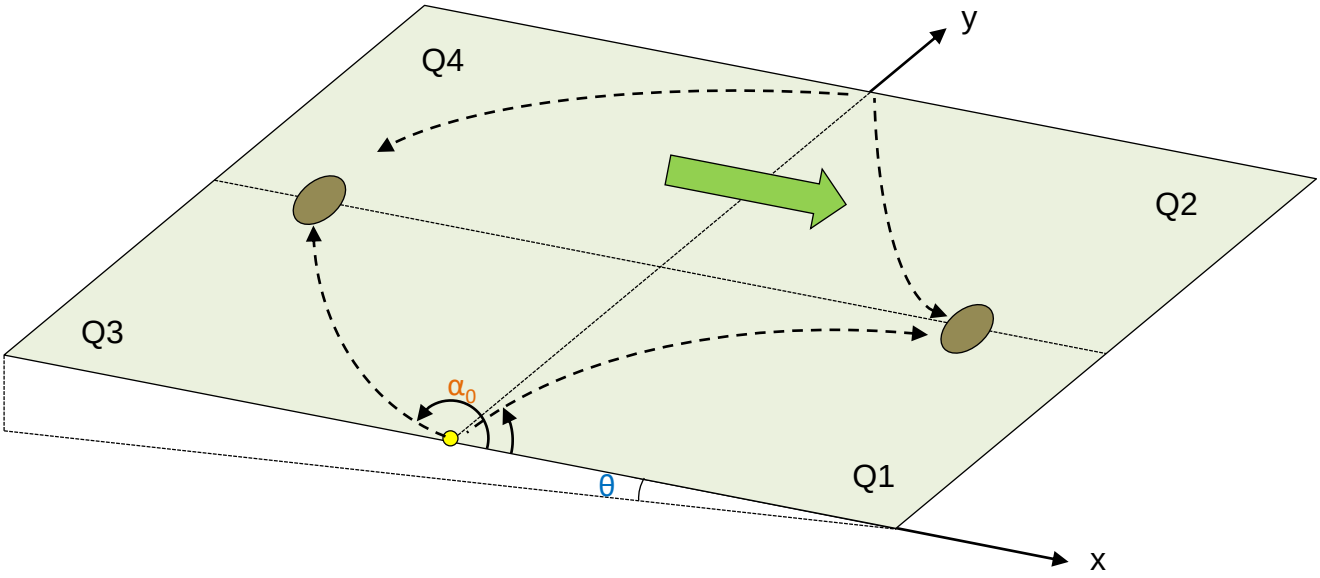
$$x(\alpha) = -\frac{(V_0)^2 \ \sin^2\alpha_0}{4 \, g \sin\theta \ (\tan\alpha_0/2)^{2M}} \left[ \frac{(\tan\alpha/2)^{2M-2}}{2M-2} - \frac{(\tan\alpha/2)^{2M+2}}{2M+2} - \frac{(\tan\alpha_0/2)^{2M-2}}{2M-2} + \frac{(\tan\alpha_0/2)^{2M+2}}{2M+2} \right]$$

(5.17)

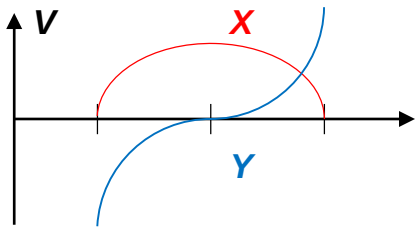
Somit ist der Putt auf einem reibungsbehafteten Grün exakt bestimmt – siehe [ 3 ].

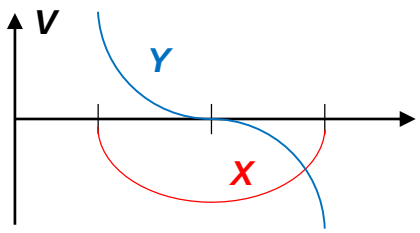
# Putt mit konstanter Reibungskraft

Uphill – Downhill Parameter Festlegung




| Downhill | | | Fall | Uphill | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Q2 | Q2/1 | Q1 | Quadrant | Q3 | Q3/4 | Q4 |
| Re | Mi | Li | Position | Li | Mi | Re |
| | positiv | > 0 | Winkel der Ebene θ | > 0 | positiv | |
| $-90^0$ | … 0 … | $+90^0$ | Startwert $\alpha_0$ | $90^0$ | $180^0$ | $270^0$ |
| | $\alpha_0$ | $0^0$ | Wertebereich α | $\alpha_0$ | $90^0$ | $0^0$ |
| 0 | pos | 0 | Geschwindigkeit $V_x$ | 0 | neg | 0 |
| neg | 0 | neg | Geschwindigkeit $V_y$ | pos | 0 | 0 |



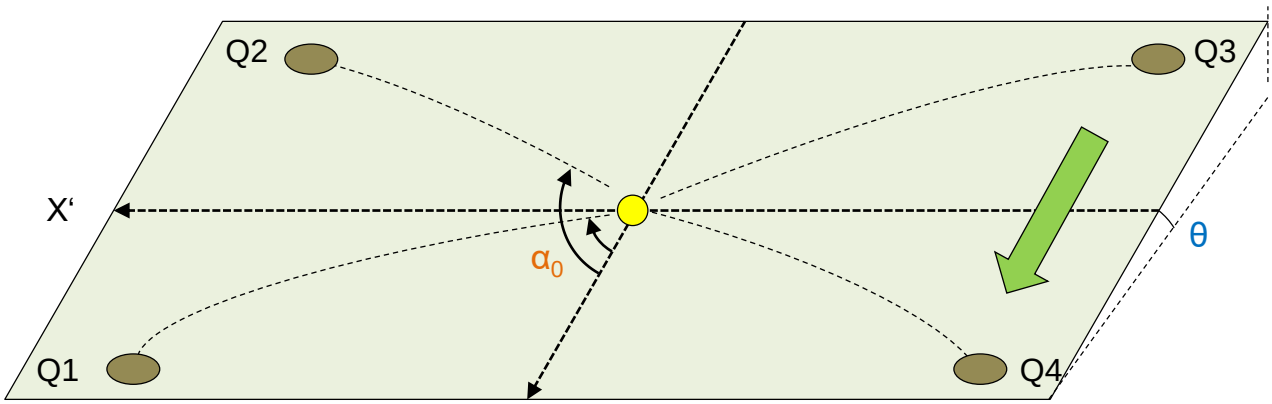

$\alpha = \arctan V_y/V_x$

$\alpha = \arctan V_y/V_x + \pi$

Die richtige Wahl der Parameter in den Quadranten 1 und 3 für Downhill bzw Uphill ermöglicht die Berechnung mit den Formeln ohne mathematische Probleme.

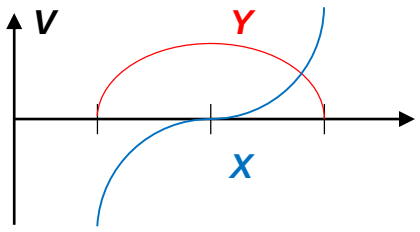
# Putt mit konstanter Reibungskraft

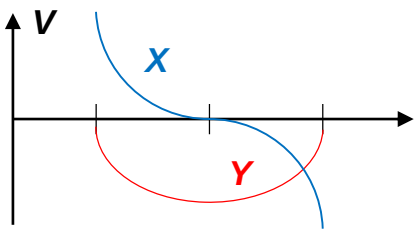
Drehen des Koordinatensystems X-Y >>> X‘-Y‘




Y‘-Koordinate

| Downhill | | | Fall | Uphill | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Q4 | Q4/1 | Q1 | Quadrant | Q2 | Q2/3 | Q3 |
| Re | Mi | Li | Position | Li | Mi | Re |
| | positiv | > 0 | Winkel der Ebene θ | > 0 | positiv | |
| – $90^0$ | … 0 … | + $90^0$ | Startwert $\alpha_0$ | $90^0$ | $180^0$ | $270^0$ |
| | $0^0$ | $\alpha_0$ | Wertebereich α | $\alpha_0$ | $90^0$ | $0^0$ |
| 0 | pos | 0 | Geschwindigkeit $V_y$ | 0 | neg | 0 |
| neg | 0 | pos | Geschwindigkeit $V_x$ | pos | 0 | neg |



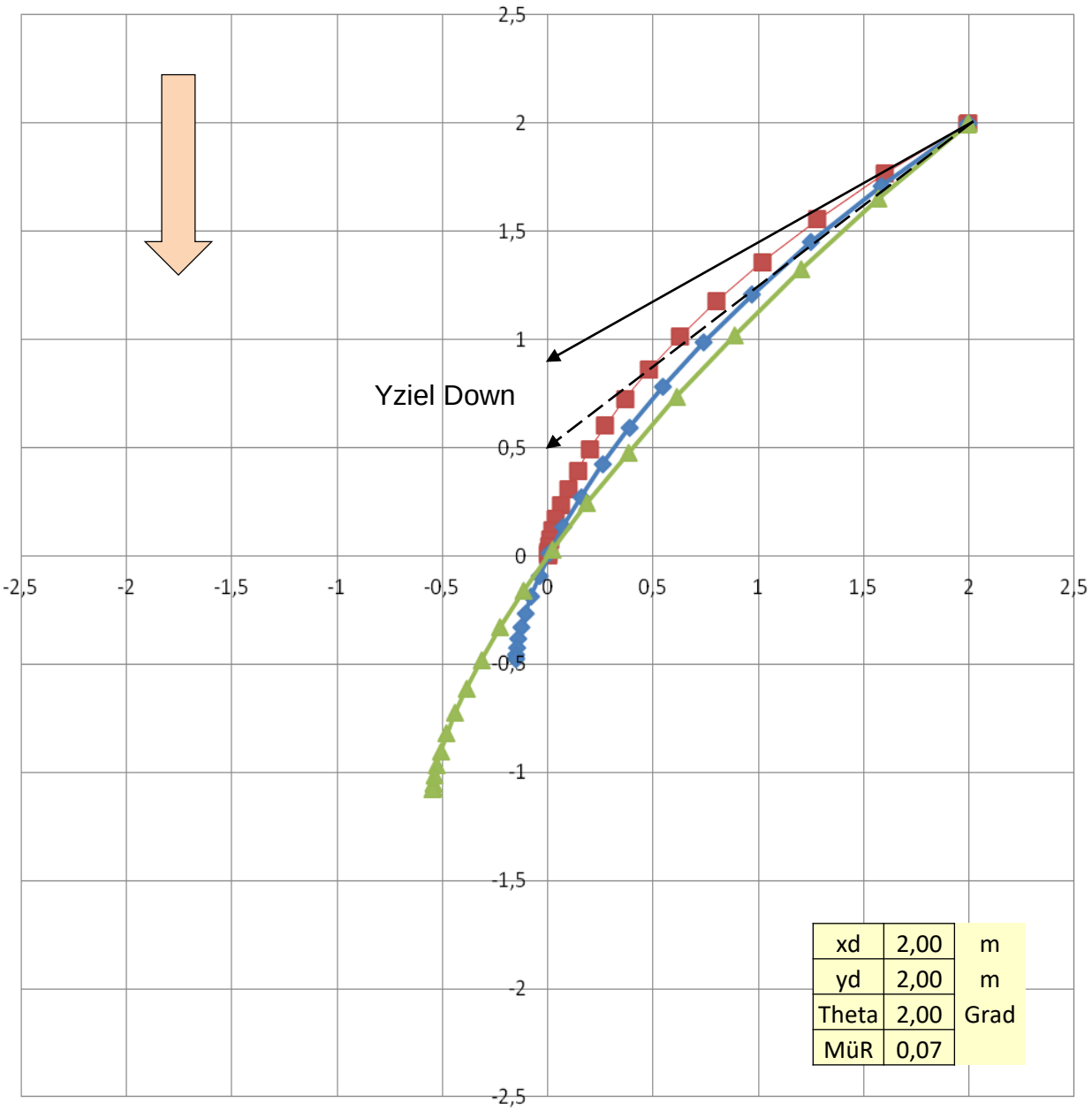

$\alpha = \arctan V_y/V_x$

$\alpha = \arctan V_y/V_x + \pi$

Die richtige Wahl der Parameter in den Quadranten 1 und 2 für Downhill bzw Uphill ermöglicht die Berechnung mit den Formeln ohne mathematische Probleme.

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Beispielhaft hier eine Übersicht des Golfballweges bei einem **Downhill Putt**:




Man erkennt sehr schön die unterschiedlichen Bahnen beim

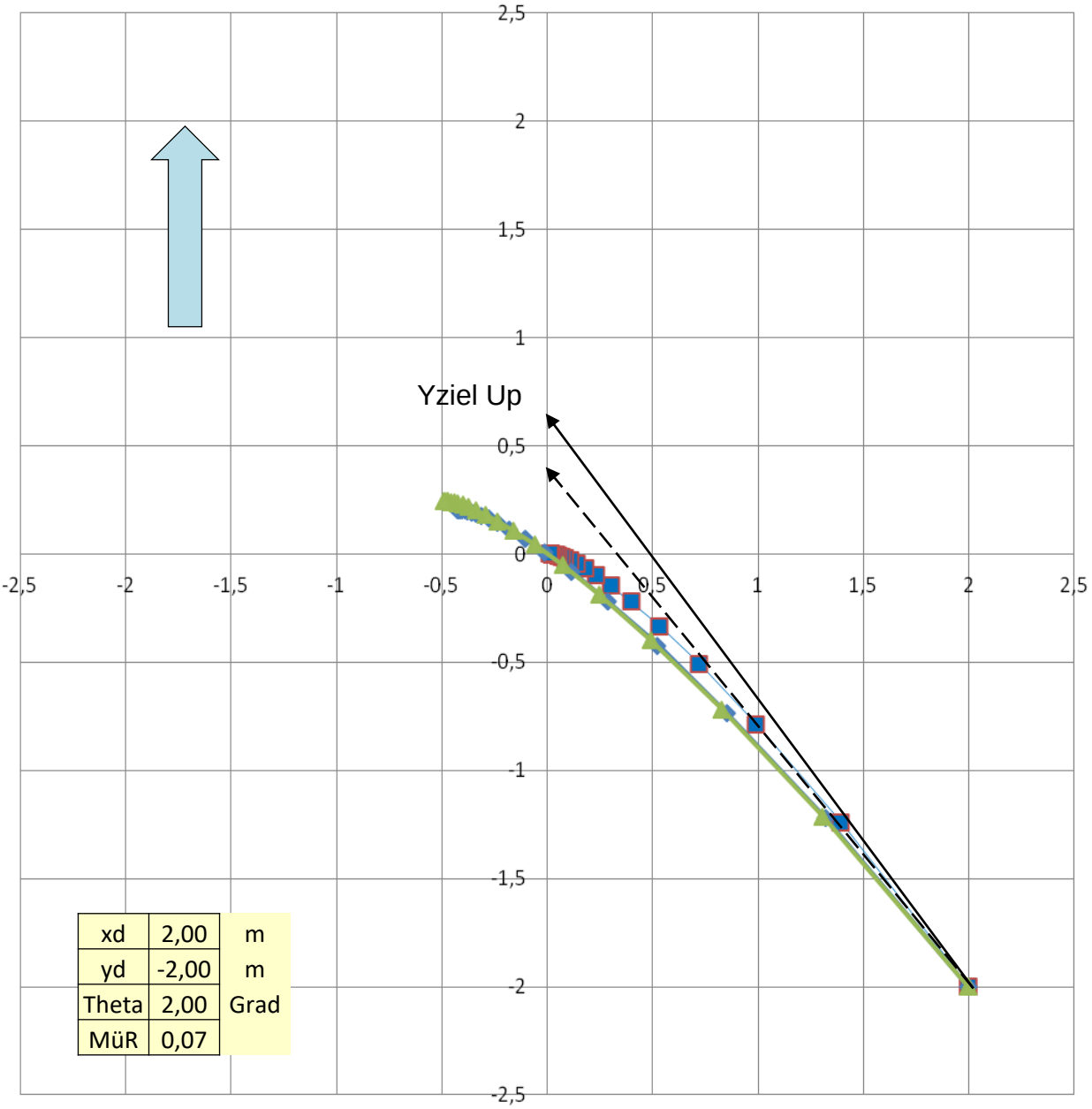
- direkten einlochen (mit Endgeschwindigkeit null – golftechnisch problematisch)
- stoppen des Balles 0,5 m hinter dem Loch (wenn man das Loch verpasst)
- einlochen mit 1 m/s Einlochgeschwindigkeit

Die Zielwerte auf der Achse variieren zwischen 0,46 m und 0,91 m bei Start-Geschwindigkeiten zwischen 1,62 m/s bis 2,26 m/s – also recht anspruchsvoll !

Viele Wege führen nach Rom bzw. ins Puttloch !

# Putt mit konstanter Reibungskraft – Uphill Fall

Beim Uphill Putt muss man viel Wert auf die Ausrichtung legen und auf die exakte Einhaltung der „richtigen“ Geschwindigkeit.



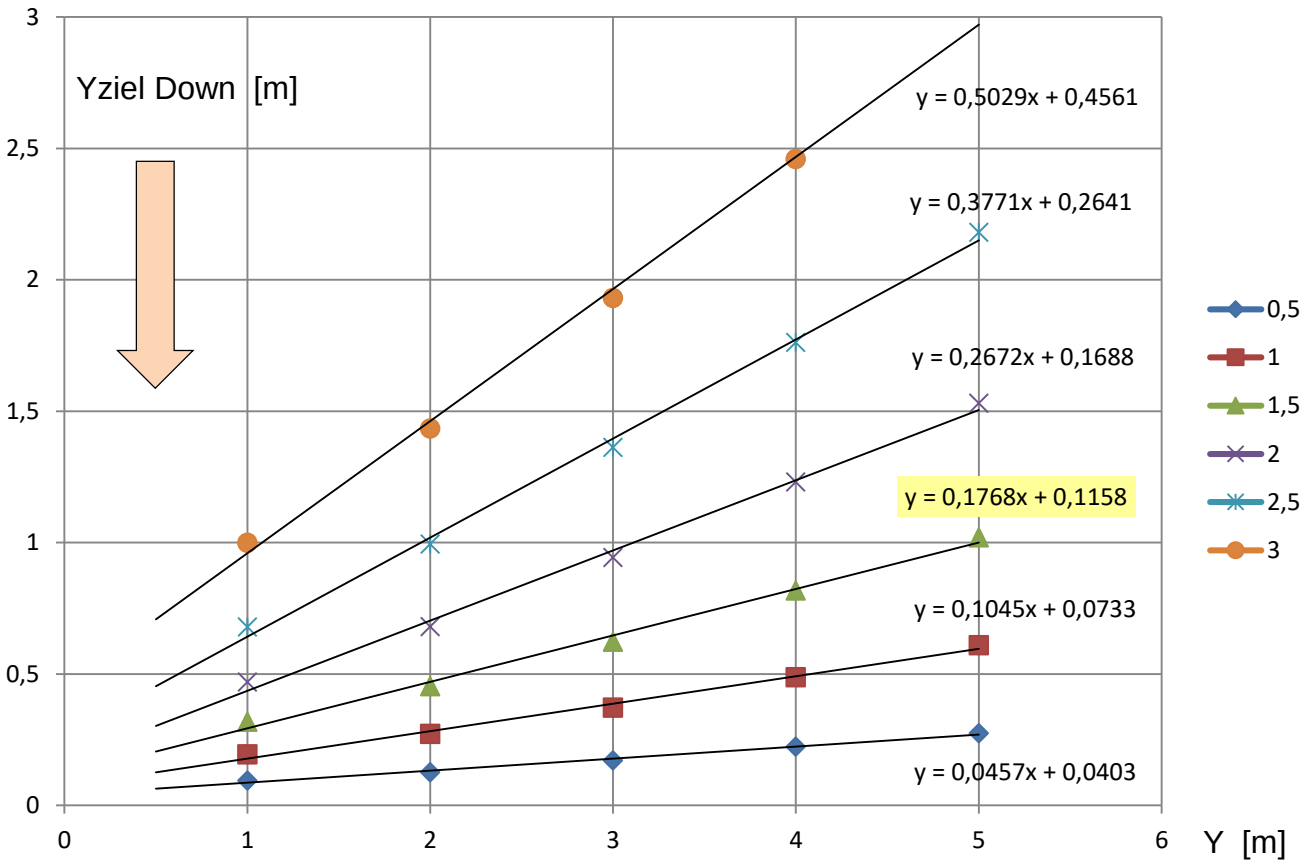

Der Zielpunkt auf der vertikalen Koordinatenachse liegt zwischen 0,37 … 0,61 m mit Start-Geschwindigkeiten zwischen 2,3 und 2,5 m/s.

Beim Uphill Putt sind die Puttvarianten „0,5m Putt über das Loch hinaus“ bzw. der „Putt mit 1 m/s Einlochgeschwindigkeit“ ähnlich – der Bergauf Putt ist einfacher.

## Putt mit konstanter Reibungskraft

Die optimale Puttstrategie ist abhängig von der „richtigen“ Winkelausrichtung und der perfekten Geschwindigkeit des Golfballes. Beim zu langsamen Putt besteht die Gefahr das kleine Bodenunebenheiten zum Fehlputt führen, bei zu hohen Geschwindigkeiten landet man ggf. zu weit weg vom Loch (wenn der Winkel nicht stimmte). Aus diesem Grunde ist der z.B. theoretisch um „0,5m zu lange“ Putt die vermutlich optimale Puttstrategie.

Für den schwierigen **Downhill Putt** erhält man:



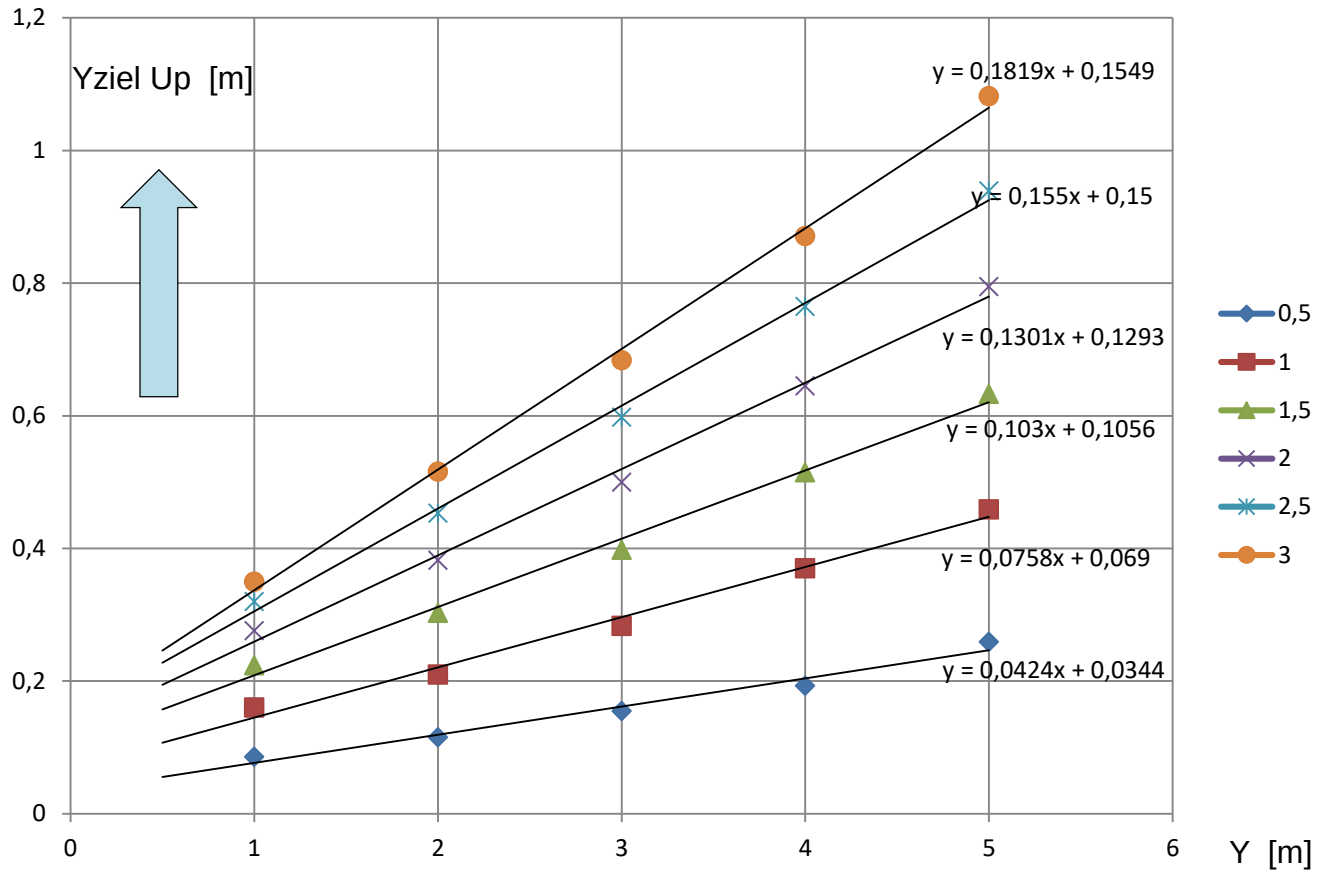

Die berechnete Zielentfernung beim Downhill Putt kann mit folgender Näherung beim Putt auf einem Grün mit dem Stimpfaktor SF wie folgt dargestellt werden. Beachte die quadratische Abhängigkeit vom Neigungswinkel θ.

| | | |
|---|---|---|
| Yziel ~ 11 mm SF $\theta^2$ Y | dabei Winkel θ in Grad, Y in m | (5.18) |

Die Genauigkeit liegt im 10% Bereich, voraussichtlich ausreichend in der Praxis
Hinweis: Die Näherungsformeln sind so angelegt dass man diese zur Not noch im Kopf rechnen kann – Praktikabilität geht hier vor mathematische Exaktheit der Abbildung einer Näherungsfunktion.

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Für den etwas leichteren **Uphill Putt** erhält man:




Wie man leicht erkennt benötigt der Uphill Putt bei der gewählten Puttstrategie „Ziele aufs Puttloch und spiele mit der Geschwindigkeit, dass der Ball max. 0,5 m hinter dem Loch zum halten kommt“ für Uphill und Downhill unterschiedliche Zielpunkte auf den Y-Achse.

Beachte: dieses Ergebniss erhält man auch mit der „Stokes‘schen Reibung“

Die berechnete Zielentfernung beim Downhill Putt kann mit folgender Näherung beim Putt auf einem Grün mit dem Stimpfaktor SF wie folgt dargestellt werden.

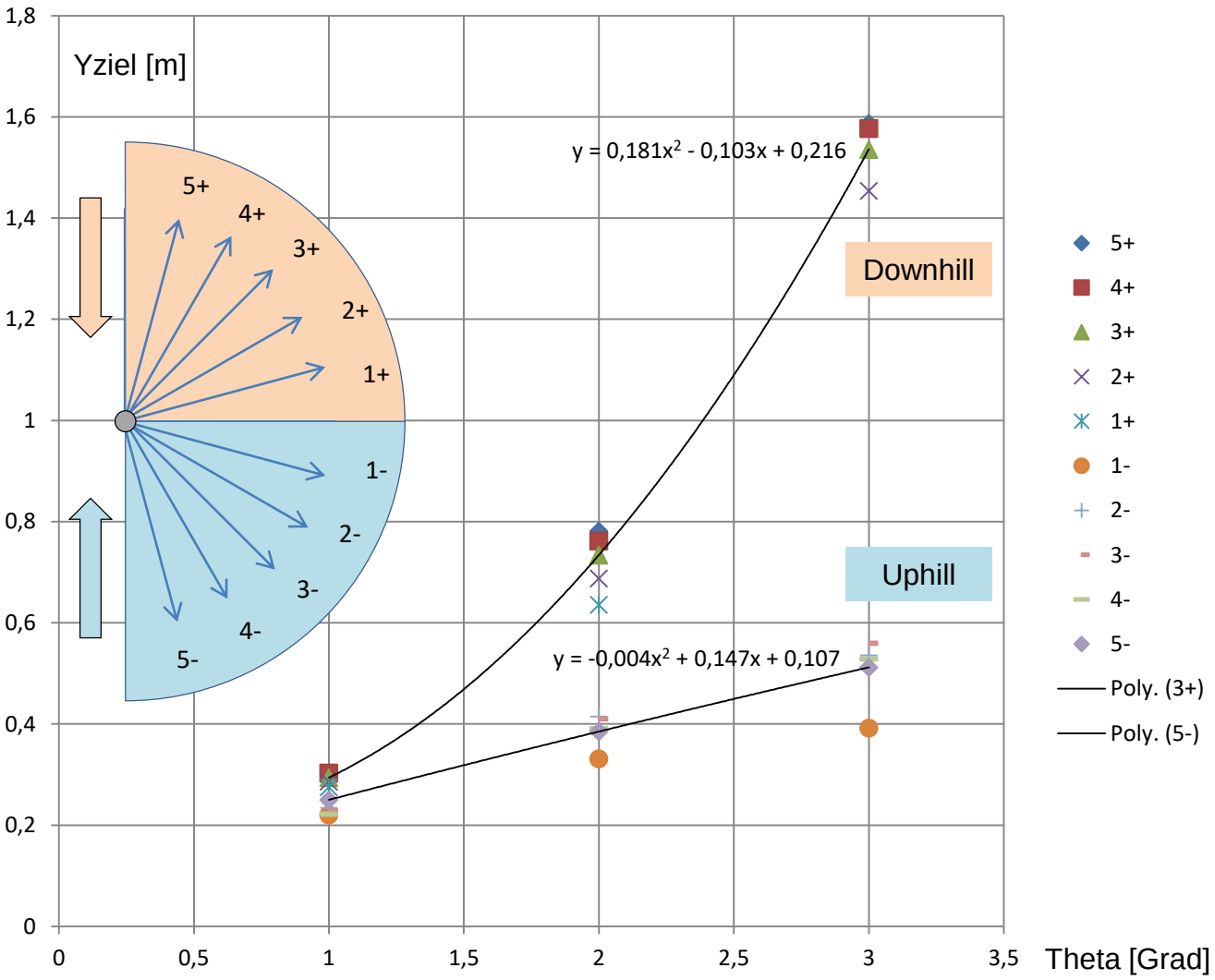
| | | |
|---|---|---|
| Yziel ~ 11 mm SF θ Y | dabei Winkel θ in Grad, Y in m | (5.19) |

Die Genauigkeit liegt im 10% Bereich, ausreichend in der Praxis

Beachte: Gleichung 5.18 und 5.19 beschreiben den Zielpunkt auf der Y-Achse in Abhängigkeit von der zu bestimmenden Entfernung nur in Y-Richtung !

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Die Graphik zeigt den Zielpunkt auf der Y-Achse wenn man bei unterschiedlichen Neigungen Theta des Grüns (zwischen 1 und 3 Grad) im Kreis um das Puttloch herumgeht und versucht einzulochen. Hierbei wurde davon ausgegangen dass der „0,5 m zu lange Putt“ als Puttstrategie verwendet wurde (R = 3 m, SF = 8).

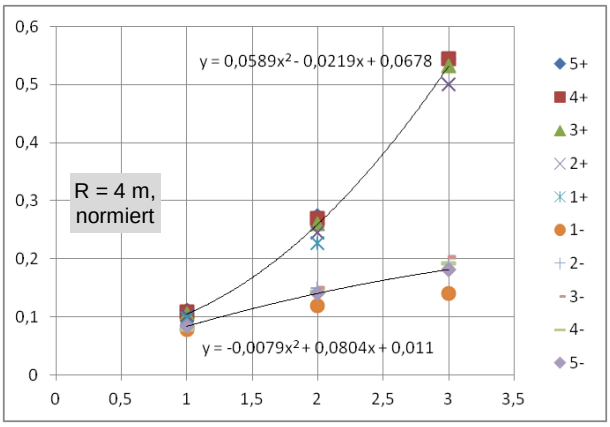


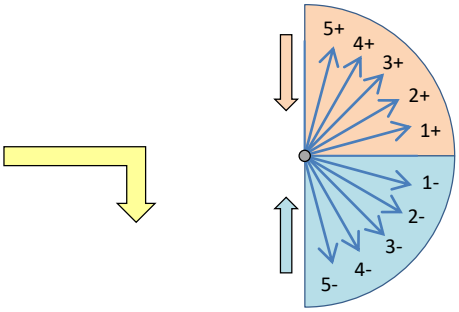

Wie man erkennt hat die steigende Reibung den Effekt, dass die Zielpunkte auf der Y-Achse nicht mehr für den Uphill und Downhill Putt übereinstimmen (wie man es vom reibungsfreien Fall gem. § 3 erwarten würde). Der Downhill Putt zeigt eine quadratische Abhängigkeit vom Neigungswinkel $\theta$

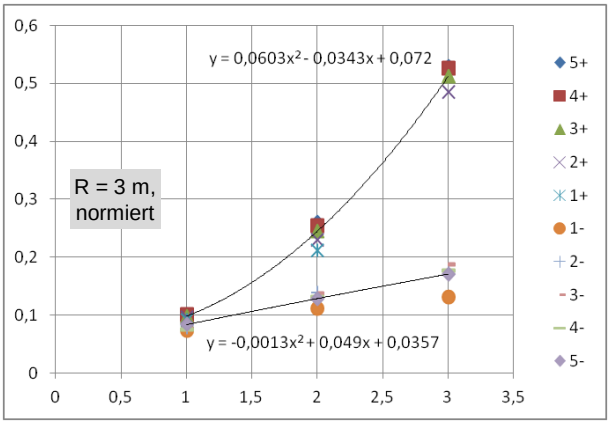
Die Werte streuen beim Downhill Putt um ca. +/- 10 cm, beim Uphill Putt sind die Streuungen speziell beim nahezu horizontalen Putt ( siehe Position 1-) relativ gesehen etwas größer.

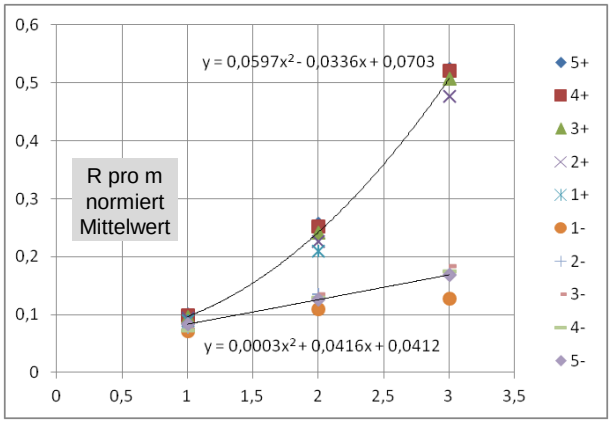
# Putt mit konstanter Reibungskraft

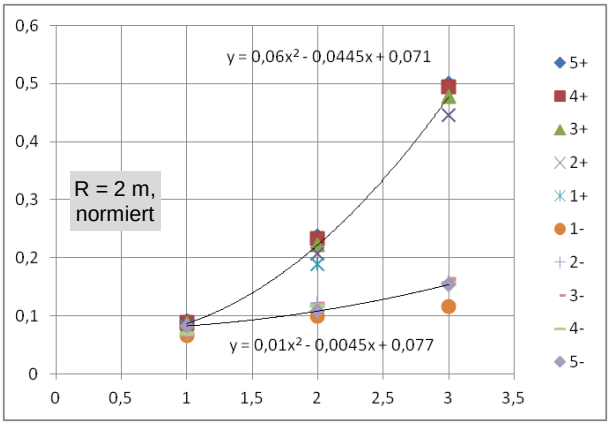
Die folgenden Graphiken zeigen bei unterschiedlichen Radien, **normiert auf 1 Meter** um das Puttloch das Verhalten der optimalen Puttausrichtung auf das Ziel.




Man erkennt sehr leicht die Ähnlichkeit der Ergebnisse und kann durch einfache Mittelwertbildung eine Näherung ableiten (die Genauigkeit beträgt ca. +/- 6 % )

Die berechnete Zielentfernung beim Down-/Uphill Putt kann mit folgender Näherung auf einem Grün mit dem Stimpfaktor SF dargestellt werden.

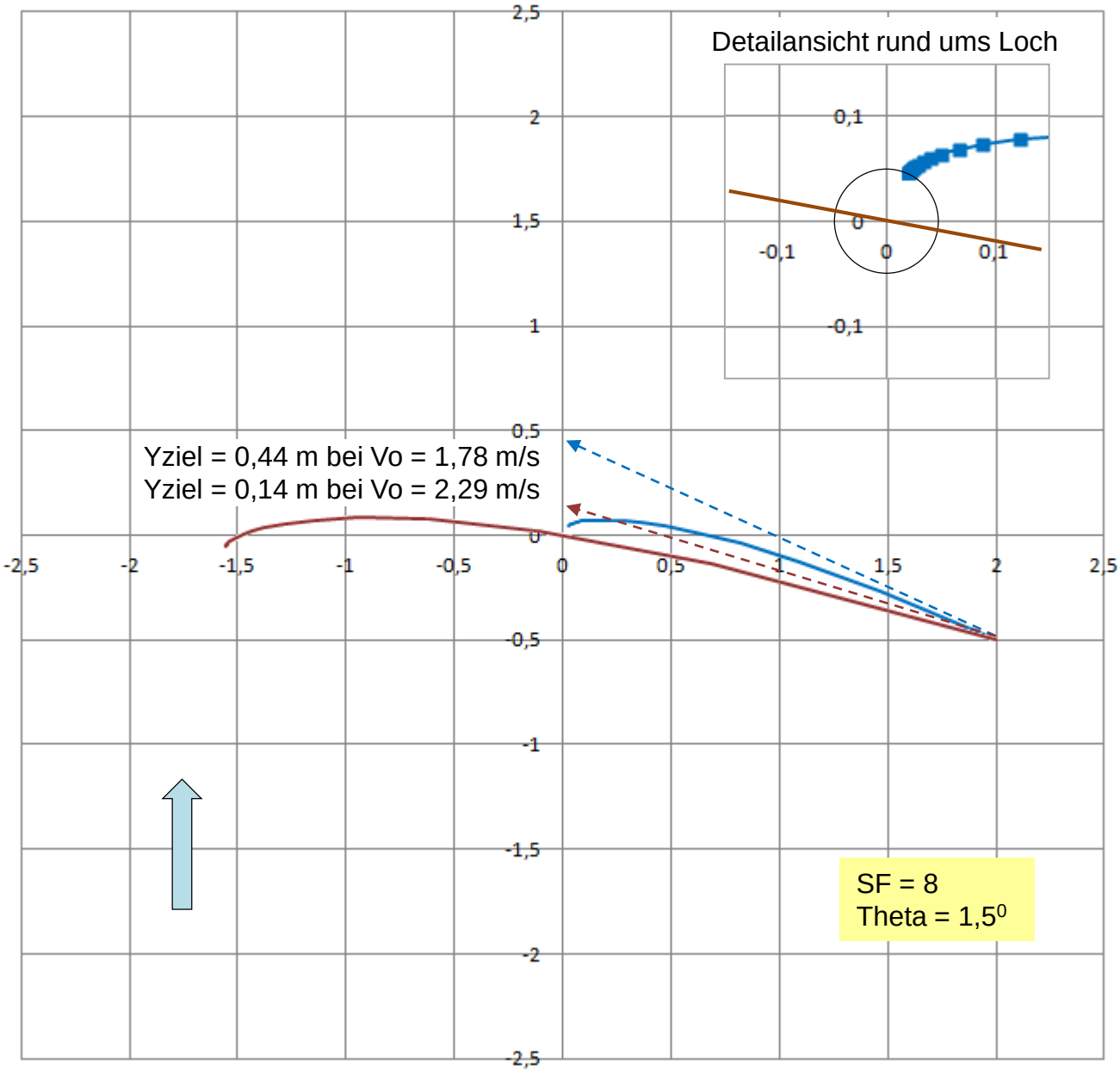
| | | |
|---|---|---|
| Downhill: | $Yziel \sim (\theta^2 - \frac{1}{2}\theta + 1)\ R\ SF\ 8\ mm$ | (5.20) |
| Uphill: | $Yziel \sim (\theta + 1)\ R\ SF\ 5\ mm$ | (5.21) |

hierbei Neigungswinkel $\theta$ in Grad, Radius in m

## Putt mit konstanter Reibungskraft

Mit Hilfe der exakten Lösungsgleichungen für den Golfball kann man jetzt auch die zulässigen Grenzen eines erfolgreichen Putts ermitteln. Es gibt zwei Möglichkeiten:

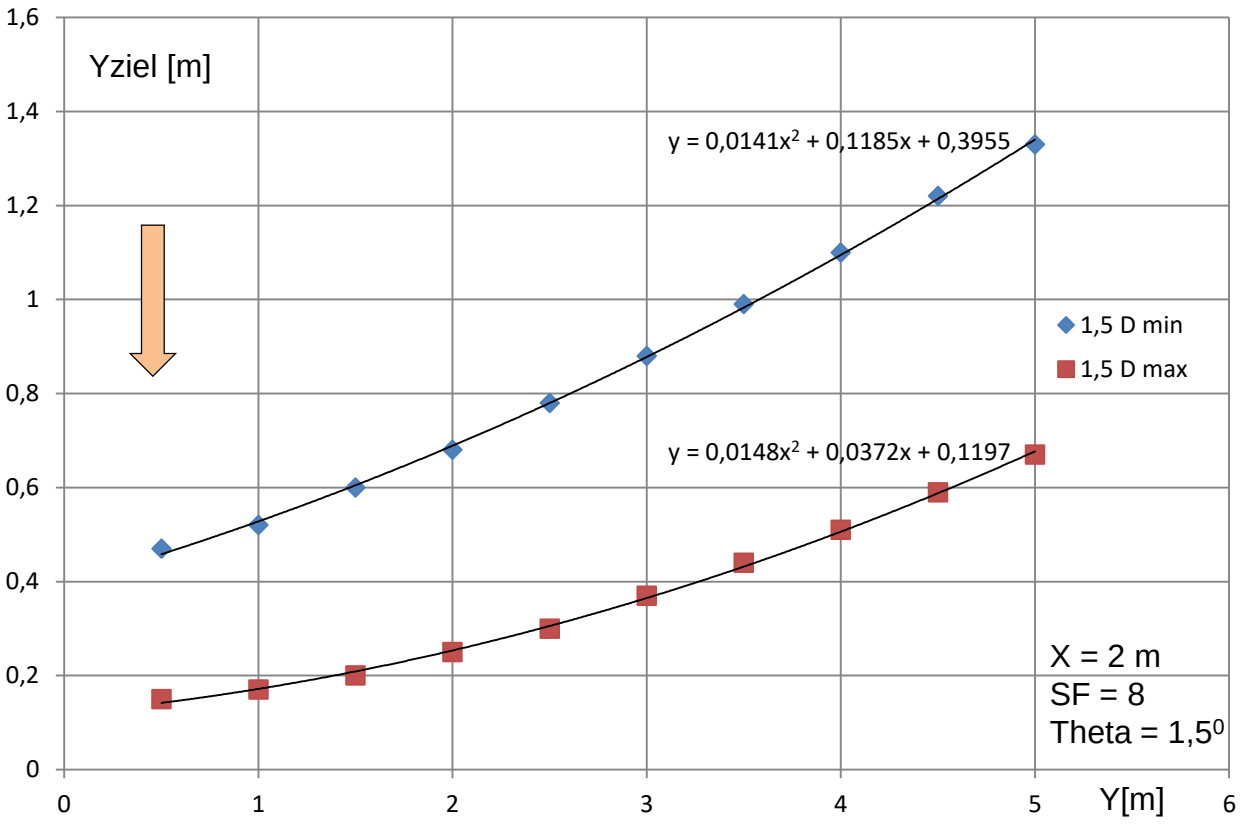
1. Man puttet auf ein maximales Yziel auf der Y-Achse und kommt mit minimaler Geschwindigkeit null am Randes des Puttloches an (sodass der Ball noch fällt)
2. Man puttet auf ein minimales Yziel mit maximaler Startgeschwindigkeit Vo sodass der Ball zentral mit der maximalen Geschwindigkeit von z.B. 1,5 m/s gerade noch ins Loch fällt (nach Penner sind theoretisch 1,65 m/s möglich).

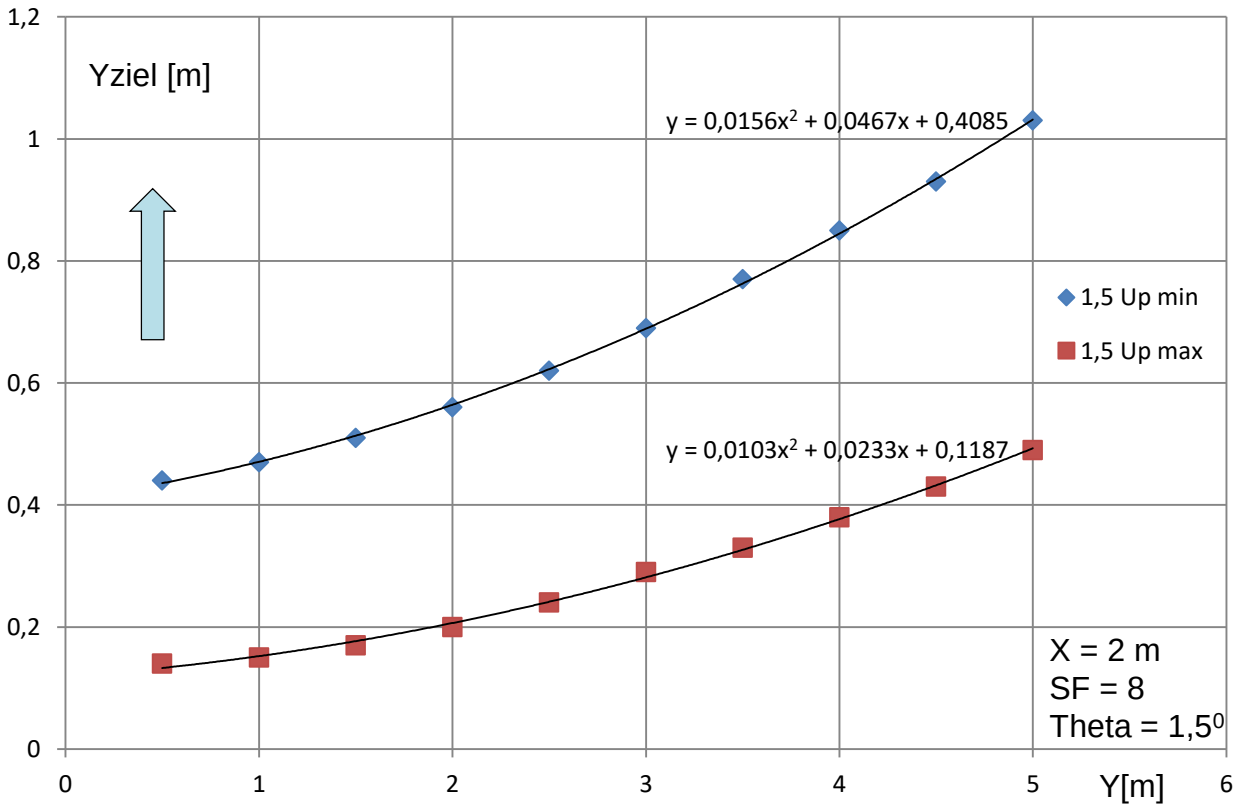



Man hat als Golfspieler also durchaus akzeptable Variationsmöglichkeiten im Anspielpunkt und der Geschwindigkeit beim putten.

# Putt mit konstanter Reibungskraft

Die folgende Ansicht zeigt die **Grenzen der zulässigen Anspielpunkte** auf der Y-Achse in den Grenzen zwischen V = 0 m/s beim einputten am Rande des Golfloches bzw. mit maximalem V = 1,5 m/s beim zentralen Putt für Down-/ Uphill.




Man hat also durchaus einen akzeptablen Variationsspielraum in Yziel und Vo

# 6. Der Putt auf einem Grün mit Stokes‘scher Reibung

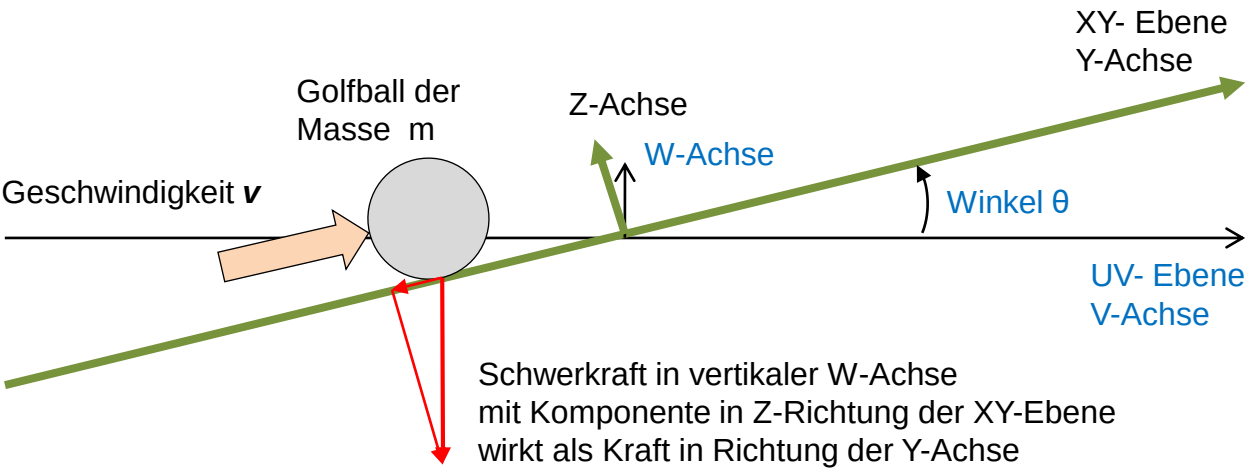
Auf den Golfball in der x-y-Ebene wirken zwei Kräfte

1. Schwerkraft in w-Richtung mit Auswirkungen in der x-y-Ebene
   x-Achse: keine Schwerkraftwirkung, da per Definition die x-Achse so ausgerichtet ist, dass sie rechtwinklig zur w-Achse ist.
   y-Achse: ein Anteil proportional zum sin θ wirkt der Geschwindigkeit in y-Richtung entgegen bzw. beschleunigt zusätzlich

2. Geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft in x-y-Ebene in beiden Achsen
   x-Achse: Reibung auf den Ball
   y-Achse: Reibung durch reduzierte Schwerkraftwirkung ~ cos θ
   Grenzfall: Senkrechte Ebene (θ = 90 Grad ) folgt keine Reibung da dann „freier Fall“ in y-Richtung

Somit die auf den Ball einwirkenden Kräfte

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{F_R} = -\beta^* \boldsymbol{V}$ | Reibungskraft in U, V Ebene prop. $\boldsymbol{V}$ |
| $\boldsymbol{F_R} = -\beta \boldsymbol{V}$ | mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ in X-Y Ebene |
| $\boldsymbol{F_S} = -\boldsymbol{e_w}\, m\, g$ | Schwerkraft in negativer W-Richtung |
| $\boldsymbol{F_S} = -\boldsymbol{e_y}\, m\, g \sin\theta$ | |




Die gesamten Kräfte in der XY-Ebene sind dann

$$\boldsymbol{F} = -\beta \boldsymbol{V} - \boldsymbol{e_y}\, m\, g \sin\theta$$

Die Bewegungsgleichung des Golfballes lautet also

$$m \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = -\beta \boldsymbol{V} - \boldsymbol{e_y}\, m\, g \sin\theta$$

# Der Putt auf einem Grün mit Stokes‘scher Reibung

Lösung der Bewegungsgleichung mit d***R***/dt = ***V*** als Geschwindigkeit

$$m \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -\beta\, \boldsymbol{V} - \boldsymbol{e}_y\, m\, g \sin\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -\frac{\beta}{m}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{e}_y\, g \sin\theta = -\frac{\beta}{m}\Big[\overbrace{\boldsymbol{V} + \boldsymbol{e}_y\, g \frac{m}{\beta} \sin\theta}^{\boldsymbol{V}^*}\Big] = -\frac{\beta}{m}\boldsymbol{V}^*$$

Umstellen nach ***V**** ergibt Möglichkeit zur direkten Integration

$$\frac{d\boldsymbol{V}^*}{\boldsymbol{V}^*} = -\frac{\beta}{m} dt$$

$$\ln \boldsymbol{V}^* = -\beta/m\, t + \ln \textit{\textbf{Int. Konstante}}$$

Für t = 0 sei die ***Int. Konstante V* = V*$_0$*** = $\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{e}_y\, mg/\beta \sin\theta$

$$\ln\left(\frac{\boldsymbol{V} + \boldsymbol{e}_y\, mg/\beta \sin\theta}{\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{e}_y\, mg/\beta \sin\theta}\right) = -\beta/m\, t$$

umstellen ergibt direkt ***V***

$$\boldsymbol{V} = [\, \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{e}_y\, mg/\beta \sin\theta\, ]\, e^{-\beta/m\, t} - \boldsymbol{e}_y\, mg/\beta \sin\theta$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0\, e^{-\beta/m\, t} - \boldsymbol{e}_y \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\beta/m\, t}\right) \sin\theta \qquad (6.1)$$

Diese Beziehung kann direkt integriert werden um den Weg zu berechnen

$$\boldsymbol{R} = -m/\beta\, [\, \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{e}_y\, mg/\beta \sin\theta\, ]\, e^{-\beta/m\, t} - \boldsymbol{e}_y\, mg/\beta \sin\theta\; t + \textit{\textbf{Int. Konstante}}$$

Für t = 0 startet der Ball bei $\boldsymbol{R}_0 = \mathbf{e}_x\, R_{x0} + \mathbf{e}_y\, R_{y0}$

Somit die vektorielle ***Int. Konstante*** = $\boldsymbol{R}_0 + m/\beta\, \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{e}_y\, m^2 g/\beta^2 \sin\theta$

Die Wegbeziehung für den Golfball lautet also

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + m/\beta \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{e}_y m^2 g/\beta^2 \sin\theta - m/\beta\, [\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{e}_y mg/\beta \sin\theta\, ]\, e^{-\beta/m\, t} - \boldsymbol{e}_y mg/\beta \sin\theta\; t$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \frac{m}{\beta}\boldsymbol{V}_0 \left(1 - e^{-\beta/m\, t}\right) - \boldsymbol{e}_y \left[\left(\frac{mg}{\beta} \sin\theta\right) t - \frac{m^2 g}{\beta^2} \sin\theta \left(1 - e^{-\beta/m\, t}\right)\right]$$

Diskussion: große Zeiten ergeben endliche negative y-Geschwindigkeit bei stetig fallendem Ball in y und endlichem x-Werten (gemäß Reibungsansatz !) (6.2)

# Der Putt auf einem Grün mit Stokes‘scher Reibung

Die Beziehungen für die x und y-Komponenten der Geschwindigkeit und vom Weg ergeben sich aus den Gl. 5.1 und 5.2 zu:

$$\boldsymbol{V}_x = \boldsymbol{V}_{0x}\, e^{-\beta/m\, t} \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{V}_y = \boldsymbol{V}_{0y}\, e^{-\beta/m\, t} - \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\beta/m\, t}\right) \sin\theta \tag{6.4}$$

$$\boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{R}_{0x} + \frac{m}{\beta}\boldsymbol{V}_{0x}\left(1 - e^{-\beta/m\, t}\right) \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{R}_y = \boldsymbol{R}_{0y} + \frac{m}{\beta}\boldsymbol{V}_{0y}\left(1 - e^{-\beta/m\, t}\right) - \left[\left(\frac{mg}{\beta}\sin\theta\right) t - \frac{m^2 g}{\beta^2}\sin\theta\left(1 - e^{-\beta/m\, t}\right)\right]$$

Aus Gleichung 5.5 für den Weg in x-Richtung kann eine Beziehung zwischen β und dem Stimpfaktor abgeleitet werden, denn die endliche Wegstrecke bei einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ beträgt (für große t) bei einem Ballgewicht m von 46 Gramm

$$\boldsymbol{R} = m\,\boldsymbol{V} / \beta = [\,\boldsymbol{V}_R\,]^2 / (2\,\mu_R\, g\,)$$

$$\beta = \frac{2\,\mu_R\, g\, m}{\boldsymbol{V}_0} = 0{,}451\,\mu_R = \frac{0{,}252}{SF} \tag{6.7}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| - | Langsames Grün mit SF von | 4 | damit β = | 0,063 |
| - | Mittleres Grün | 6 | | 0,042 |
| - | Schnelles Grün | 8 | | 0,032 |
| - | PGA Grün | 10 | | 0,025 |

**Lösungsweg:**

Hierbei müssen (wie im Fall der konstanten Reibung) die Höhe in y-Richtung überwunden werden um dann in X = Y = 0 einzulochen.

Unglücklicherweise sind die Gleichungen für die Zeit und die Geschwindigkeiten in x- und y-Richtung nicht direkt explizit lösbar.

Mit einer Startzeit t = m/ β ergibt sich

| | | | |
|---|---|---|---|
| aus Gl. | 6.6 | eine Beziehung für | $\boldsymbol{V}_{0y}$ |
| aus | 6.5 | | $\boldsymbol{V}_{0x}$ |
| und | 6.4 | ist lösbar nach | $t_{up/down}$ |

Mehrfaches durchlaufen dieser Schleife ergibt ein ausreichendes Lösungsset.

**UPHILL**:

Mit dem zeitlichen Startwert für die Iteration folgt

$$T_o = m/\beta$$

$$0 = \boldsymbol{R_{0y}} + \frac{m}{\beta}\boldsymbol{V_{0y}}\,(1 - e^{-\beta/m\,t}) - [(\frac{mg}{\beta}\sin\theta)\,t - \frac{m^2 g}{\beta^2}\sin\theta\,(1 - e^{-\beta/m\,t})]$$

$$\boldsymbol{V_{0y}} = -\boldsymbol{R_{0y}}\frac{\beta/m}{(1\text{-}e^{***})} + \frac{\beta}{m}\frac{[\,(mg/\beta\sin\theta)\,t - m^2 g/\beta^2\sin\theta\,(1\text{-}e^{***})\,]}{(1\text{-}e^{***})}$$

$$\boldsymbol{V_{0y}} = \frac{-\boldsymbol{R_{0y}}\beta/m + g\sin\theta\,t - mg/\beta\sin\theta\,(1\text{-}e^{***})}{(1\text{-}e^{***})} \qquad (6.A)$$

$$0 = \boldsymbol{R_{0x}} + \frac{m}{\beta}\boldsymbol{V_{0x}}\,(1 - e^{-\beta/m\,t})$$

$$\boldsymbol{V_{0x}} = -\frac{\beta}{m}\frac{\boldsymbol{R_{0x}}}{(1\text{-}e^{***})} \qquad (6.B)$$

$$0 = \boldsymbol{V_{0y}}\,e^{-\beta/m\,t} - \frac{mg}{\beta}\,(1 - e^{-\beta/m\,t})\sin\theta$$

$$0 = \boldsymbol{V_{0y}}\,e^{-\beta/m\,t} - \frac{mg}{\beta}\sin\theta + \frac{mg}{\beta}e^{-\beta/m\,t}\sin\theta$$

$$0 = e^{***}\,[\,\boldsymbol{V_{0y}} + mg/\beta\sin\theta\,] - mg/\beta\sin\theta$$

$$e^{-\beta/m\,t} = \frac{mg/\beta\sin\theta}{\boldsymbol{V_{0y}} + mg/\beta\sin\theta}$$

$$T_i = -\frac{m}{\beta}\,\mathrm{Ln}\left[\frac{mg/\beta\sin\theta}{\boldsymbol{V_{0y}} + mg/\beta\sin\theta}\right] \qquad (6.C)$$

Zur Abkürzung: $e^{***} = \mathrm{Exp}\,(-\beta/m\,t)$

**DOWNHILL**:

Da es in x-Richtung kein ausgeprägtes Maximum gibt, kann nur dieselbe Zeitkonstante Ti wie im Uphill Fall Verwendung finden. Die $V_x$ Geschwindigkeit ist gleich, $V_y$ wird aus Gl. (6.A) berechnet.

# Der Putt auf einem Grün mit Stokes‘scher Reibung

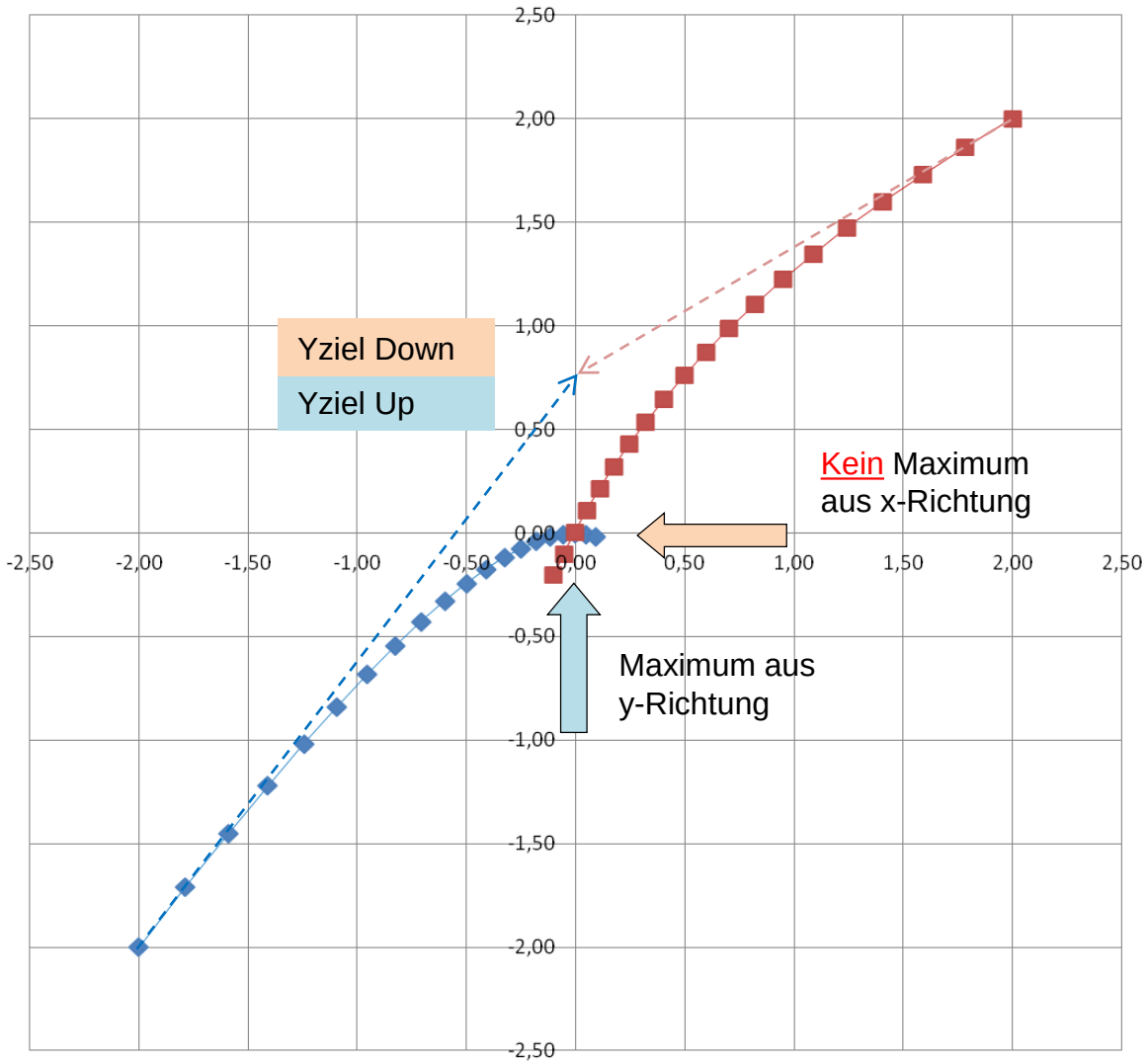
Die folgende Graphik zeigt den Bewegungsverlaufs des Golfballs

| UPHILL | | |
|---|---|---|
| xups | -2,00 | m |
| yups | -2,00 | m |
| vxups | 1,79 | m/s |
| vyups | 2,46 | m/s |
| Theta | 3,00 | Grad |
| Beta | 0,032 | |
| Masse | 0,046 | |

| Δ t | 0,125 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 0,00 | 0,13 | 0,25 | 0,38 | 0,50 | 0,63 | 0,75 | 0,88 | 1,00 | 1,13 | 1,25 | 1,38 | 1,50 | 1,63 | 1,75 | 1,88 | 2,00 | 2,13 | 2,25 | 2,38 |
| x | -2,00 | -1,79 | -1,59 | -1,41 | -1,24 | -1,09 | -0,95 | -0,83 | -0,71 | -0,60 | -0,50 | -0,41 | -0,33 | -0,25 | -0,18 | -0,12 | -0,06 | 0,00 | 0,05 | 0,09 |
| y | -2,00 | -1,71 | -1,45 | -1,22 | -1,02 | -0,84 | -0,68 | -0,54 | -0,43 | -0,33 | -0,24 | -0,17 | -0,12 | -0,07 | -0,04 | -0,02 | -0,01 | 0,00 | -0,01 | -0,02 |
| dx/dt | 1,79 | 1,64 | 1,50 | 1,38 | 1,27 | 1,16 | 1,07 | 0,98 | 0,90 | 0,83 | 0,76 | 0,70 | 0,64 | 0,59 | 0,54 | 0,49 | 0,45 | 0,42 | 0,38 | 0,35 |
| dy/dt | 2,46 | 2,19 | 1,95 | 1,73 | 1,53 | 1,34 | 1,17 | 1,01 | 0,87 | 0,73 | 0,61 | 0,50 | 0,40 | 0,30 | 0,22 | 0,14 | 0,07 | 0,00 | -0,06 | -0,12 |
| ds/dt | 3,04 | 2,74 | 2,47 | 2,21 | 1,99 | 1,78 | 1,58 | 1,41 | 1,25 | 1,11 | 0,98 | 0,86 | 0,75 | 0,66 | 0,58 | 0,51 | 0,46 | 0,42 | 0,39 | 0,37 |
| YuZiel | 0,754 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| DOWNHILL | | |
|---|---|---|
| xds | 2,00 | m |
| yds | 2,00 | m |
| vxds | -1,79 | m/s |
| vyds | -1,11 | m/s |

| x | 2,00 | 1,79 | 1,59 | 1,41 | 1,24 | 1,09 | 0,95 | 0,82 | 0,70 | 0,60 | 0,50 | 0,41 | 0,32 | 0,25 | 0,17 | 0,11 | 0,05 | 0,00 | -0,05 | -0,10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2,00 | 1,86 | 1,73 | 1,60 | 1,47 | 1,35 | 1,23 | 1,11 | 0,99 | 0,87 | 0,76 | 0,65 | 0,54 | 0,43 | 0,32 | 0,21 | 0,11 | 0,00 | -0,10 | -0,20 |
| dx/dt | -1,79 | -1,64 | -1,51 | -1,38 | -1,27 | -1,17 | -1,07 | -0,98 | -0,90 | -0,83 | -0,76 | -0,70 | -0,64 | -0,59 | -0,54 | -0,50 | -0,46 | -0,42 | -0,38 | -0,35 |
| dy/dt | -1,11 | -1,08 | -1,05 | -1,03 | -1,01 | -0,98 | -0,97 | -0,95 | -0,93 | -0,92 | -0,90 | -0,89 | -0,88 | -0,87 | -0,86 | -0,85 | -0,84 | -0,83 | -0,83 | -0,82 |
| ds/dt | 2,11 | 1,97 | 1,84 | 1,72 | 1,62 | 1,53 | 1,44 | 1,37 | 1,30 | 1,24 | 1,18 | 1,13 | 1,09 | 1,05 | 1,01 | 0,98 | 0,96 | 0,93 | 0,91 | 0,89 |
| YdZiel | 0,760 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |



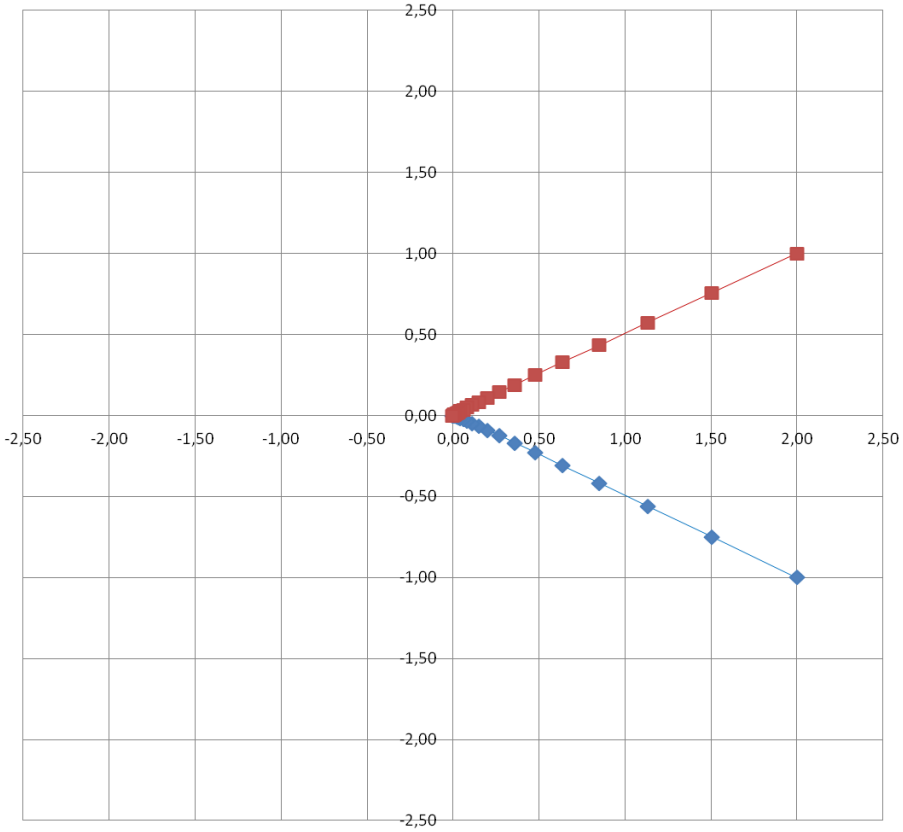

Man erkennt deutlich den (Ansatz bedingten) Kurvenverlauf beim Downhill Putt mit stetig fallendem Y-Wert (da die Geschwindigkeit gegen einen Grenzwert strebt) . Da es kein Maximum in x-Richtung gibt, hat man beim Downhill Putt bei gleicher X-Geschwindigkeit auch gleiche Zielpunkte auf der Y-Achse.

# Test bei einigen Grenzwerten

**Test 1**: Eine ebene Fläche mit Theta gleich null muss Geraden ergeben

| UPHILL | | |
|---|---|---|
| xups | 2,00 | m |
| yups | -1,00 | m |
| vxups | -1,40 | m/s |
| vyups | 0,71 | m/s |
| Theta | 0,01 | Grad |
| Beta | 0,032 | |
| Masse | 0,046 | |

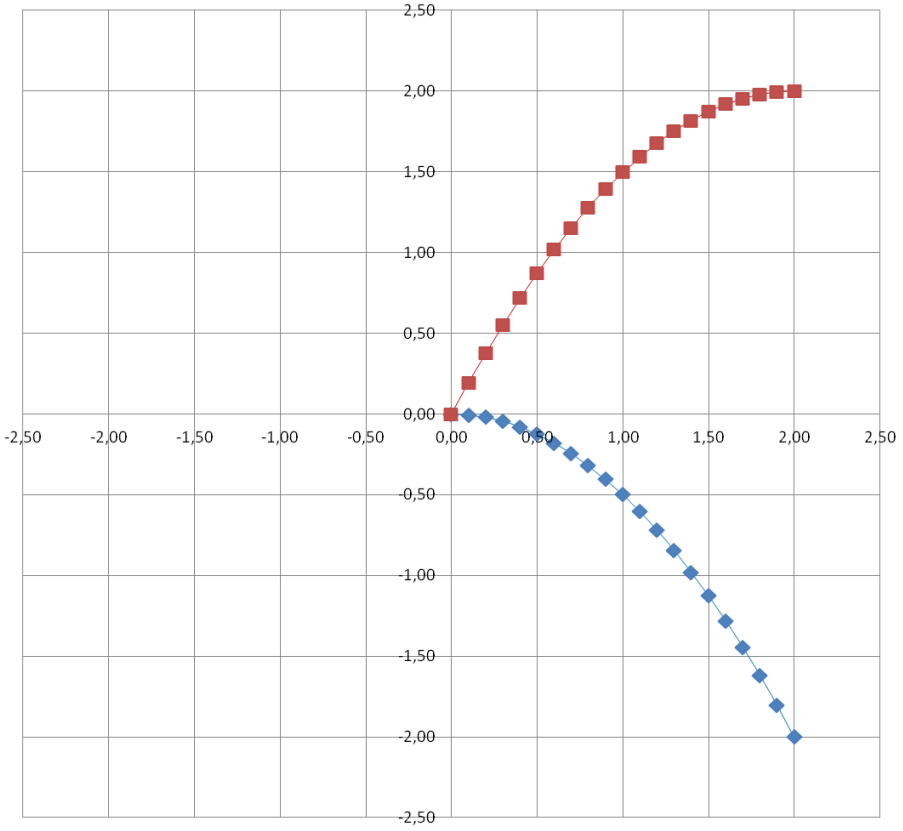
| DOWNHILL | | |
|---|---|---|
| xds | 2,00 | m |
| yds | 1,00 | m |
| vxds | -1,40 | m/s |
| vyds | -0,69 | m/s |




**Test 2**: Ohne Reibung müssen sich perfekte Parabeln ergeben

| UPHILL | | |
|---|---|---|
| xups | 2,00 | m |
| yups | -2,00 | m |
| vxups | -0,72 | m/s |
| vyups | 1,44 | m/s |
| Theta | 3,00 | Grad |
| Beta | 1E-04 | |
| Masse | 0,046 | |

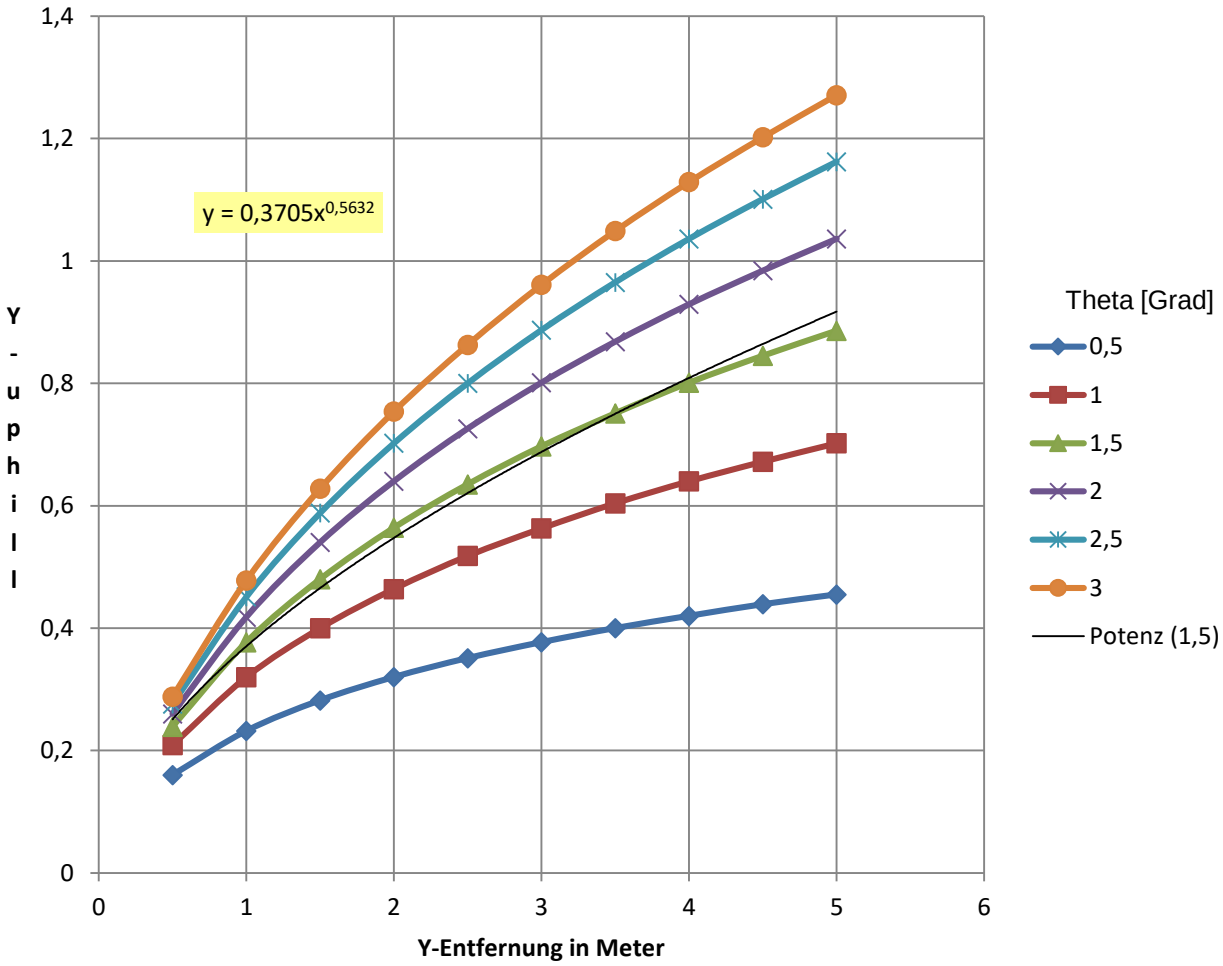
| DOWNHILL | | |
|---|---|---|
| xds | 2,00 | m |
| yds | 2,00 | m |
| vxds | -0,72 | m/s |
| vyds | 0,00 | m/s |




Die Grenzwerte wurden gut angenähert, die Lösungen könnten stimmen !

# Praktische Näherung für das Grün mit Reibung

Für unterschiedliche Neigungswinkel des Grüns Phi können folgende Werte auf der Y-Achse beim Up-/ Downhill Putt berechnet werden (SF = 8, Beta = 0,0315)




Da die Bewegungsgleichung eine Parabel zweiten Grades ist, können obige Funktionen durch ein einfaches Wurzelgesetz angenähert werden.

$$Y_{up/down} = 0{,}04\ SF\ \sqrt{\theta\ Y} \qquad \text{dabei Winkel } \theta \text{ in Grad, Y in m} \qquad (6.8)$$

Die Näherung hat im allgemeinen eine Genauigkeit von ca. 3 % (bei kleinem Theta)

Somit dann die praktischen Arbeitsschritte für den „perfekten“ Golfputt:

1. Bestimme die Ausrichtung des Koordinatensystems auf dem Grün
2. Schätze den Stimpfaktor SF des Grüns/ die Reibungskonstante Beta
3. Messe/ schätze den Neigungswinkel Theta des Grüns
4. Messe/ schätze die y-Entfernung zum Loch
5. Berechne den Uphill/ Downhill Abstand zum Loch gemäß Gl. 6.8
6. Dann nur noch mit der ? richtigen ? Geschwindigkeit auf das Ziel putten.

# 7. Vergleich mit anderen Veröffentlichungen

Robert D. Grober von der Yale University hat in einer Veröffentlichung [ 4 ] „The Geometry of Putting on a planar surface“ nach einer aufwendigen Analyse folgende Graphik veröffentlicht, in der man die optimale Zielentfernung beim putten ablesen bzw. aus einer Näherungsformel berechnen kann.

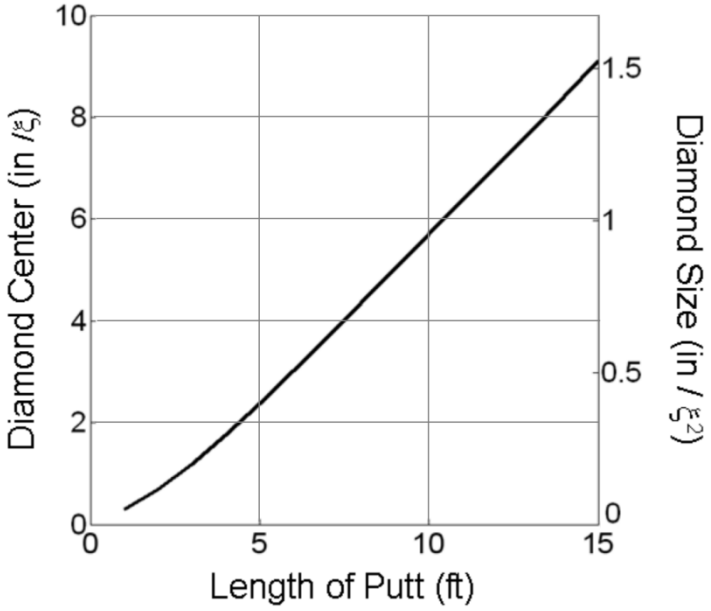
Die Funktion kann wie folgt linear angenähert werden.

$$Yziel = 5\frac{mm}{m} * R * SF * Theta$$

(7.1)

dabei ist

R der Abstand in Meter
SF der Stimpfaktor
Theta der Winkel in **Prozent**




Beispiel: Abstand R = 3 m, Stimpfaktor = 8, MüR = 0,07, Theta = 3 Grad = 5,2 %
Das Ziel auf der Y-Achse liegt dann bei 624 mm = 0,62 m

Die eigenen Berechnungen ergeben dabei eine Ortsabhängigkeit von x und y

| X/ m | Y/ m | Y_ziel |
|---|---|---|
| 1 | 2,828 | 0,511 |
| 1,5 | 2,598 | 0,532 |
| 2 | 2,236 | 0,557 |
| 2,5 | 1,658 | 0,551 |

Konstante Reibung gem. § 5, Uphill/05

| X/ m | Y/ m | Y_ziel |
|---|---|---|
| 1 | 2,828 | 0,93 |
| 1,5 | 2,598 | 0,88 |
| 2 | 2,236 | 0,81 |
| 2,5 | 1,658 | 0,67 |

Stoke‘sche Reibung gem. § 6

Die obigen Tabellen wurde für einen Radius von R = 3 m berechnet.

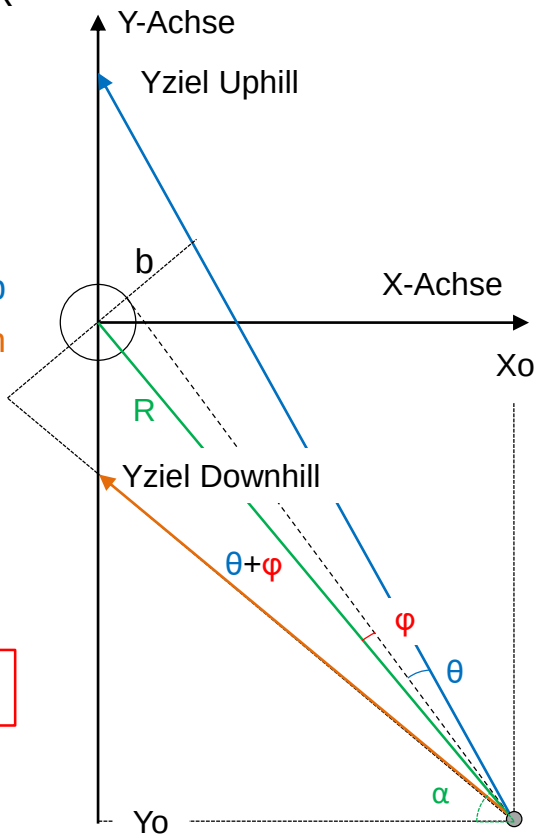
In einem YouTube Video sind beeindruckende Golf Putt Vorführungen zu sehen, die die obige Formel in der Praxis zu bestätigen scheinen. **Aber:** die Lösungen bzw. die praktischen Demo‘s sind abhängig von der „richtigen“ Geschwindigkeit. Wie wir in § 5 gesehen haben, kann man in einem gewissen Bereich beide Werte (Yziel und Vo) variieren und trifft trotzdem (fast) immer ins Loch.

## Vergleich mit anderen Veröffentlichungen

“Aim Point” Guru Jamie Donaldson erklärt im Beitrag “The Art of Green Reading” vom 14. April 2015 (siehe www.todaysgolfer.co.uk/tips-and-tuition/tuition-features) eine praktische Methode der Puttausrichtung. Dabei wird (abhängig vom Neigungswinkel Theta) ein Punkt rechtwinklig vom Puttloch angepeilt und auf diesen gezielt.

Dabei wird der notwendige Winkel Theta durch z.B. die Anzahl der Finger dargestellt. Bei einer Fingerdicke von ~2 cm und einem Armabstand von ca. 60 cm zu den Augen entspricht dieser Winkel gerade ca. 2 Grad (arctan 2/60).

Dieses Vorgehen kann wie folgt dargestellt werden. Es gilt mit dem Lochradius r und dem Abstand R zum Puttloch bei den beschriebenen Winkeln.




$\tan \varphi = r/R$

$\tan \theta = b/R$

$\sin \alpha = Yo/R$

$\tan [\alpha + (\theta + \varphi)] = (-Yo + Yziel) / Xo$ Up

$\tan [\alpha - (\theta + \varphi)] = Yo - Yziel / Xo$ Down

Mit $Xo = \sqrt{(R)^2 - (Yo)^2}$

folgt dann für die Fälle

Uphill:

$Yziel = Yo + Xo \tan [\alpha + (\theta + \varphi)]$

(7.2) $Yziel = Yo + \sqrt{R^2 - (Yo)^2} \tan [\alpha + (\theta + \varphi)]$

Downhill:

$Yziel = Xo \tan [\alpha - (\theta + \varphi)]$

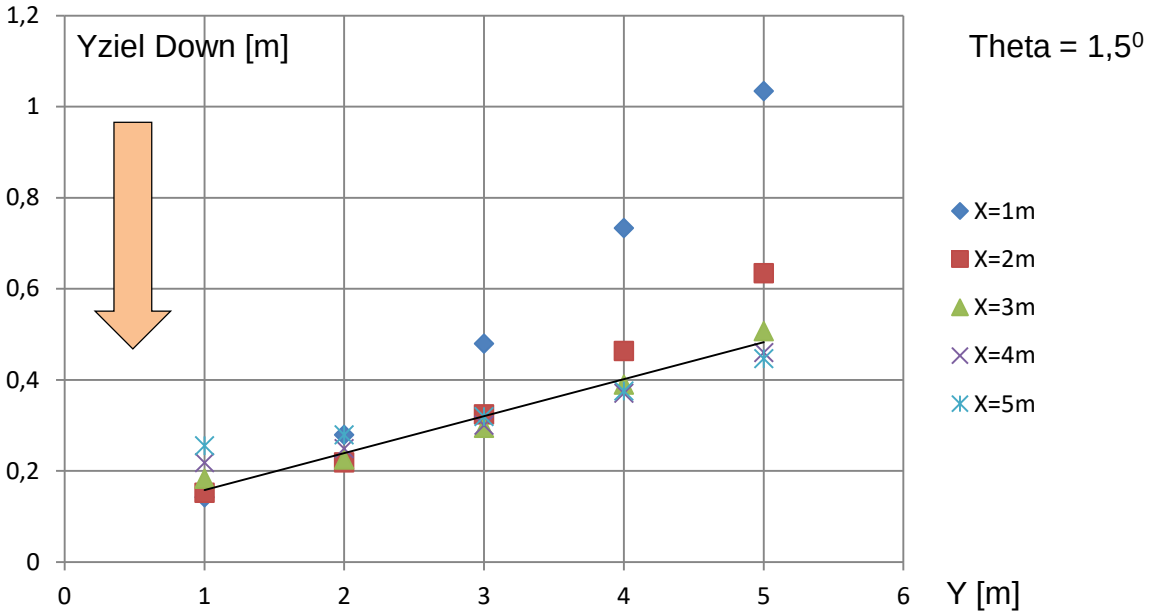
(7.3) $Yziel = Yo - \sqrt{R^2 - (Yo)^2} [\tan \alpha - (\theta + \varphi)]$

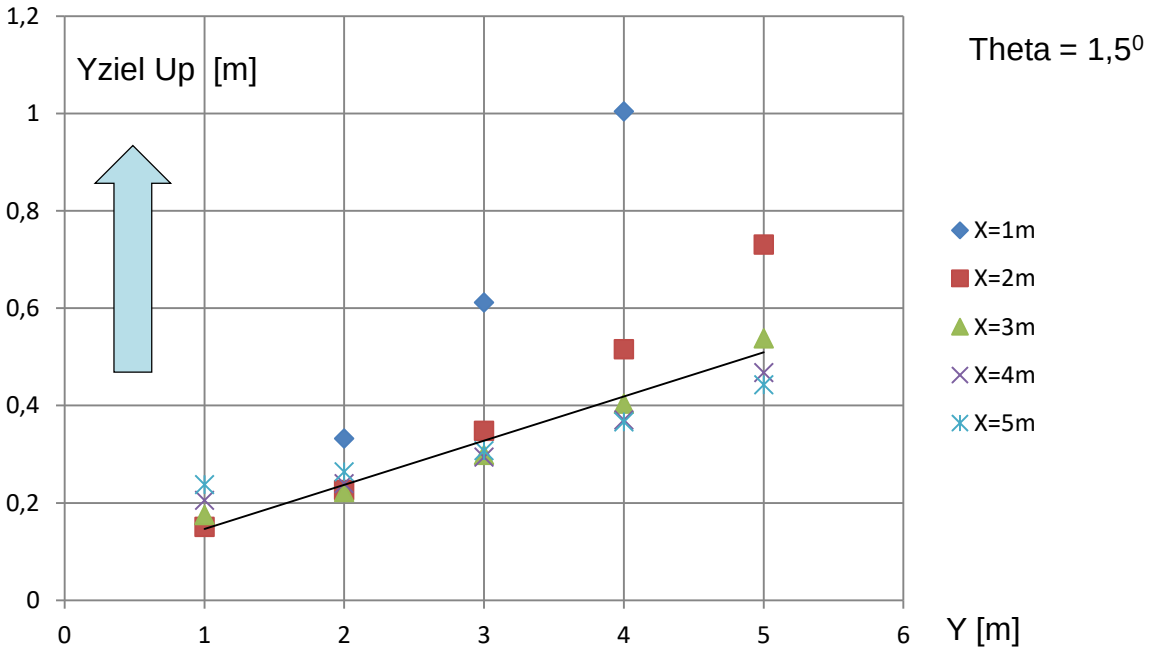
Diese einfachen Beziehungen beschreiben schön die unterschiedlichen Zielpunkte für den Uphill bzw. den Downhill Fall.

Beachte: ggf. unterschiedliche Stimpfaktoren des Grüns werden hierbei nicht berücksichtigt. Dies könnte man ev. mit einem entsprechenden Faktor ergänzen.

# Vergleich mit anderen Veröffentlichungen

Die folgenden Graphiken zeigen die Zielpunkte auf der Y-Achse gem. Gl. 7.2/ 3




Ein Vergleich mit der exakten Lösung unter § 5 zeigt ein durchaus akzeptables Verhalten, die Ergebnisse sind tendenziell korrekt und könnten um den Einfluss des bisher fehlenden Stimpfaktors ergänzt werden.
Eine erste Orientierungshilfe ist mit dieser einfachen Methode durchaus gegeben.

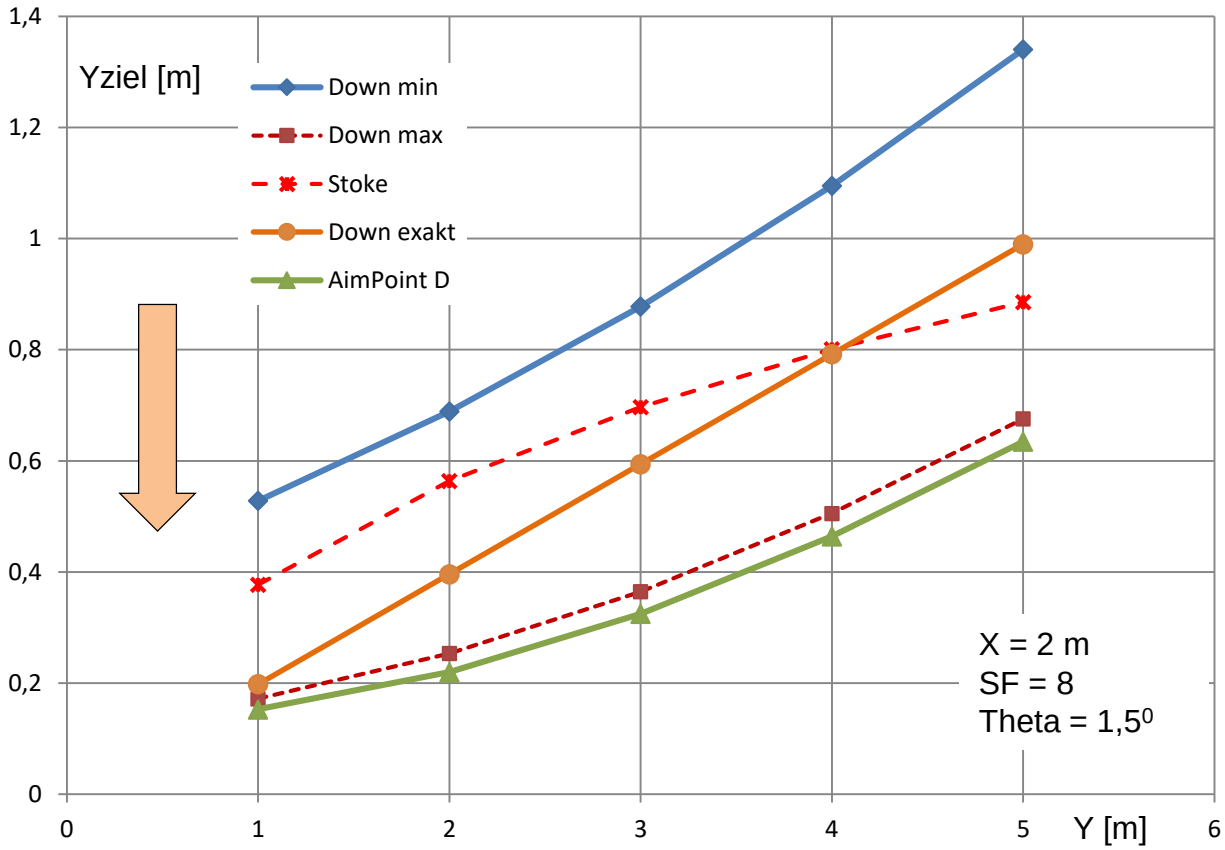
Nebenbei: der Vergleich mit der exakten Lösung aus § 5 zeigt, dass die Lösung weiter verbessert werden könnte, wenn man sein Ziel auf den Theta-fachen Peilwinkel ausrichtet.

## Vergleich mit anderen Veröffentlichungen

Trägt man alle bisher erörterten Puttstrategien in ein (zwei) Diagramme ein, so kann man die „optimale“ Zielstrategie bestimmen und kann sie mit den durch die exakte Lösung ermittelten Grenzwerte vergleichen.

Folgende Lösungsmodelle (neben dem Fall ohne Reibung) wurden bisher analysiert.

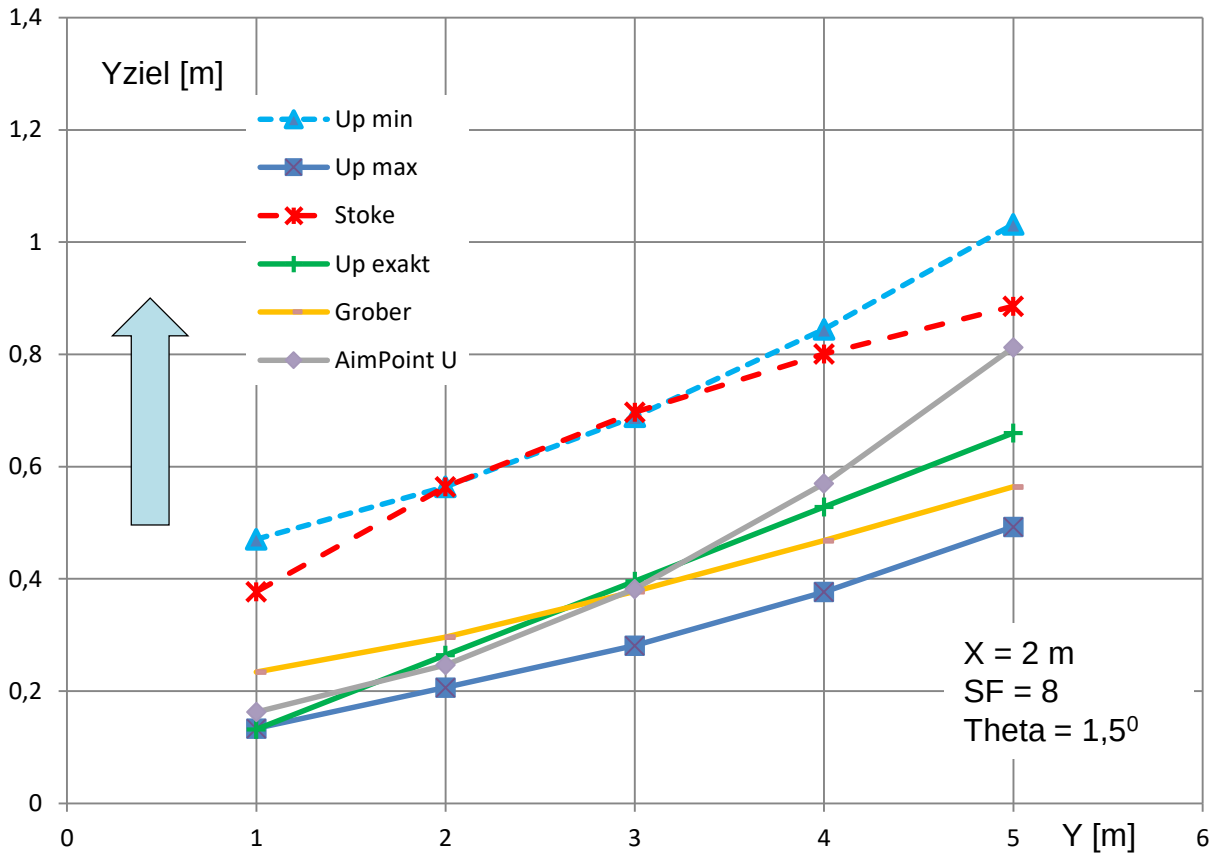
1. Die exakte Lösung der Newton‘schen Differentialgleichung für den Downhill und den Uphill Fall mit der Strategie „spiel so, dass der Ball 0,5 m hinter dem Loch zum halten kommt (das vermeidet die problematischen Rückputts)
2. Die Stoke‘sche Lösung mit geschwindigkeitsabhängiger Reibung für den Downhill und Uphill Fall gem. Gl. 6.8
3. Die aus der Theorie von Grober abgeleitete Zielstrategie gem. Gl. 7.1 die theoretisch für den Downhill und Uphill Fall gelten soll.
4. Die AimPoint Zielvorgabe von Donaldson gem. Gl. 7.2/ 3 für Up-/ Downhill.




Die Down min./max. Werte sind die aus den exakten Lösungen erarbeiteten Grenzwerte in Yziel und Geschwindigkeit um einen Putt noch ins Loch zu bringen. Man erkennt sehr schön, dass die Stokes Zielvorgabe gut im zulässigen Bereich liegt (nahe an der optimalen Zielvorgabe der exakten Lösung). Die AimPoint Zielvorgabe liegt im Downhill Fall etwas am Rande und müsste noch etwas in seinen Parametern verbessert werden.

# Vergleich mit anderen Veröffentlichungen

Für den Uphill Fall liegen alle Lösungen etwas näher beieinander in der Nähe der optimalen exakten Uphill Zielvorgabe (putte so, dass der Ball maximal 0,5 m über das Loch hinaus rollt). Die Stokes‘sche Lösung liegt etwas am Rande in der Nähe des Putts mit minimaler Geschwindigkeit – golftechnisch durchaus richtig da dann die schwierigen Downhill Putts vermieden werden (wenn es mal daneben geht).




Überraschend gut schneidet hierbei die scheinbar simple AimPoint Zielvorgabe beim Uphill Putt ab. Die Lösung von Grober [ 4 ] liegt ebenso an der optimalen und exakten Zielvorgabe der Newton‘schen Differentialgleichung gem. § 5.

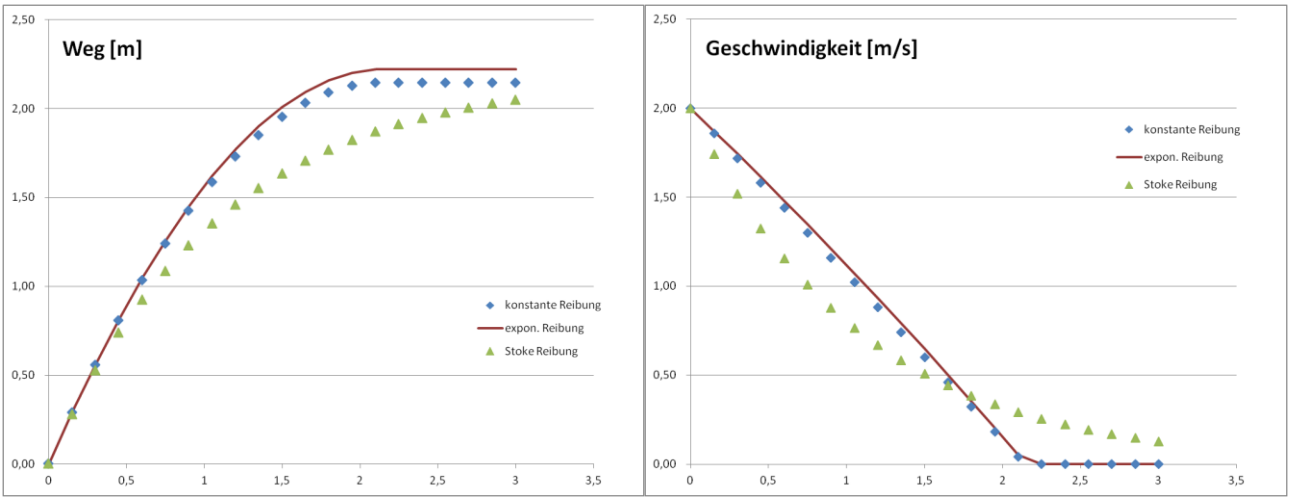
**Zusammenfassung**:

Wenn man gut im Kopfrechnen ist erscheint der Stokes‘sche Lösungsansatz eine praktikable Zielvorgabe für den Uphill und den **schwierigen** Downhill Fall zu sein.

Für den Uphill Fall ist die AimPoint Vorgabe in der Handhabung sehr einfach und zudem eine praktikable Lösung.

# 8. Welchen Einfluss haben die Reibungsmodelle ?

Die Reibungsmodelle zeigen folgendes Verhalten.




Das exponentielle Reibungsmodell lässt sich durch die Parameter Mü und $V_R$ an das konstante Reibungs-modell fast ideal anpassen.
Die Stokes Reibung läuft etwas sanfter im Weg/ Geschwindigkeit gegen die Grenzwerte.

Es dürfte nicht leicht werden in der Praxis die Parameter mit ausreichender Genauigkeit aus Messwerten auf unterschiedlichen Grüns zu ermitteln.

| | konstante Reibung | | expon. Reibung | | Stoke Reibung | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | VR | 10 | Masse | 0,046 |
| delta T | Mü | 0,095 | Mü | 0,105 | beta | 0,042 |
| 0,15 | V0 | 2 | V0 | 2 | V0 | 2 |
| Zeit | S [m] | v [m/sec] | S [m] | v [m/sec] | S [m] | v [m/sec] |
| 0 | 0,00 | 2,00 | 0,00 | 2,00 | 0,00 | 2,00 |
| 0,15 | 0,29 | 1,86 | 0,29 | 1,87 | 0,28 | 1,74 |
| 0,3 | 0,56 | 1,72 | 0,56 | 1,74 | 0,52 | 1,52 |
| 0,45 | 0,81 | 1,58 | 0,81 | 1,61 | 0,74 | 1,33 |
| 0,6 | 1,03 | 1,44 | 1,05 | 1,48 | 0,92 | 1,16 |
| 0,75 | 1,24 | 1,30 | 1,26 | 1,35 | 1,09 | 1,01 |
| 0,9 | 1,42 | 1,16 | 1,45 | 1,21 | 1,23 | 0,88 |
| 1,05 | 1,59 | 1,02 | 1,62 | 1,07 | 1,35 | 0,77 |
| 1,2 | 1,73 | 0,88 | 1,77 | 0,93 | 1,46 | 0,67 |
| 1,35 | 1,85 | 0,74 | 1,90 | 0,79 | 1,55 | 0,58 |
| 1,5 | 1,95 | 0,60 | 2,01 | 0,65 | 1,63 | 0,51 |
| 1,65 | 2,03 | 0,46 | 2,09 | 0,50 | 1,70 | 0,44 |
| 1,8 | 2,09 | 0,32 | 2,16 | 0,35 | 1,77 | 0,39 |
| 1,95 | 2,13 | 0,18 | 2,20 | 0,20 | 1,82 | 0,34 |
| 2,1 | 2,15 | 0,04 | 2,22 | 0,05 | 1,87 | 0,29 |
| 2,25 | 2,15 | | 2,22 | | 1,91 | 0,26 |
| 2,4 | 2,15 | | 2,22 | | 1,95 | 0,22 |
| 2,55 | 2,15 | | 2,22 | | 1,98 | 0,19 |
| 2,7 | 2,15 | | 2,22 | | 2,00 | 0,17 |
| 2,85 | 2,15 | | 2,22 | | 2,03 | 0,15 |
| 3 | 2,15 | | 2,22 | | 2,05 | 0,13 |

# 9. Sensitivitätsanalyse

Verwendet man z.B. das Stokes‘sche Reibungsmodell so ergeben sich folgende Werte bei einer Sensitivitätsanalyse mit folgenden Ausgangswerten:

Startwert in X-Richtung liegt bei 2 m (rechter oberer Quadrant)
Startwert in Y-Richtung liegt bei 2 m
Anstellungswinkel der Ebene sei 3 Grad
Reibungswert β = 0,0315 entspricht einem Stimpfaktor von 8

a. Die Messung/ Schätzung des Reibungsfaktors führt zu Werten zwischen β = 0,0285 … 0,0345, entsprechend einem Stimpfaktor von 8,84 … 7,30 etwa **+/- 0,75 Stimpfaktor** ( ~ 10%)

b. Die Messung/ Schätzung des **Anstellungswinkels** führt zu einem Bereich von 2,55 Grad bis 3,50 Grad für die Ebene, also ungefähr **+/- 0,5 Grad**

c. Geschwindigkeit konstant (mit $V_{x0}$ = - 1,785 m/s $V_{y0}$ = - 1,112 m/s) wird der **Peilwinkel** eingestellt durch variable X,Y v‘s ( delta Vx = +/- 1,6% und delta Vy = -/+ 4,1%) ergibt Ydown 0,824m … 0,682m, entsprechend einem Peilwinkel (aus der rechten oberen Ecke bei x:y = 2m:2m zwischen 30,45 Grad und 33,38 Grad – also **+/- 1,46 Grad**.

d. Peilwinkel konstant (d.h. Ydown konstant bei z.B. 0,754 m) **Geschwindigkeit** kann nur um **+/- 4 %** variieren um das Puttloch zumindestens am Lochrand zu treffen.

Alle Werte gehen davon aus das der Putt mit den fehlerbehafteten Daten den Lochrand berührt (also delta +/- 5,4 cm).

**Wertung**:
Das einhalten der korrekten Geschwindigkeit (speziell im Downhill Putt) dürfte die größten Schwierigkeiten bereiten, die Peilwinkeltoleranz beträgt ca. eine Fingerbreite; also ein deutlich sichtbarer Wert. Die „Messung“ des Winkels der Ebene kann (bei ausreichender Übung) auf ca. 1% erfolgen. Der Stimpfaktor wird (in einem guten Golfclub) bei Turnieren offiziell durch die Greenkeeper ermittelt.

# 10. Diskussion der bisherigen Ansätze

**Konstante Reibung – einfaches Modell:**

- Quadratische Lösung sieht auf den ersten Blick gut aus, wie erwartet
  ABER
- Uphill/ Downhill Lösung müssen in den Vorzeichen manuell korrigiert werden
- Ball stoppt nicht von alleine in x-Richtung
- Ball beginnt (auf Grund des quadratischen Terms) in y von alleine zu laufen
- Bei kleinen Startgeschwindigkeiten überwiegt der quadratische Term und führt zu seltsam gekrümmten Bahnen

**Konstante Reibung – exaktes Modell:**

- Dient als Referenz für die anderen (mathematisch einfacheren) Modelle
- Lösung kann nur noch numerisch approximiert werden, dies macht die Handhabung nicht leicht.

**Stokes‘sches Modell der Reibung:**

Per Definition ist die Reibung bei kleiner Geschwindigkeit klein. Dieser Ansatz wiederspricht der Erfahrung z.B. beim Radfahren über eine holprige Strecke. Schnell ist scheinbar ohne Wiederstand, langsam „fällt“ man in die Löcher/ Straßenunebenheiten.

Trotzdem arbeitet das Modell recht gut:

- Die Funktionen verhalten sich „physikalisch“ korrekt
- Der Weg in x-Richtung ist endlich
- Bei ebener Fläche ergeben sich wie erwartet Geraden
- Ohne Reibung gehen die Lösung in den korrekten quadratischen Fall über

ABER

- Der Weg in y-Richtung wird zu einer fallenden Gerade (wie aus dem Ansatz)
- Die Geschwindigkeit in y-Richtung strebt einem endlichen Grenzwert zu

**Wertung:**

Alle Modelle haben ihre eigenen Schwächen, wobei die Stokes‘sche Reibung eine ausreichend einfache Lösung ergibt die auch ziemlich gut mit der exakten Näherung für Down- und Uphill übereinstimmt.

## Anhang – Literaturübersicht

| | Literatur | Hinweise |
|---|---|---|
| [ 1 ] | Iván Egry, Physik des Golfspiels<br>Verlag Wiley-VCH (2014) | Eine komplette Übersicht über die Physik des Golfens |
| [ 2 ] | A.R. Penner, The physics of putting<br>Can. J. Phys. 80: 1-14 (2002) | Eine Darstellung rund um das Puttloch |
| [ 3 ] | C. & A. Aghamohammadi<br>Slipping and Rolling on an Inclined Plane<br>http://arxiv.org/abs/1106.2247v1 (2011) | Mathematische Lösung der Differentialgleichung |
| [ 4 ] | Robert D. Grober, The geometry of putting on a planar surface, Yale University<br>http://arxiv.org/abs/1106.1698 (2011) | Numerische Lösung der Bewegungsgleichungen |
| [ 5 ] | Jamie Donaldson, The art of green reading<br>Golf World, 12 Feb 2015 | Praktischer Golfansatz zur Festlegung des „Aim Pointes“ |