Optische Linsen

Grundlagen
Eine sphärische Linse
Einfall – Durchgang – Ausfall
Beispiele

Optische Grundlagen – Das Snell‘sche Brechungsgesetz

Beim Einfall eines Lichtstrahls im Medium 1 und der Materialkonstanten n1 in das Medium 2 mit der Materialkonstanten n2 gilt das bekannte Gesetz von W. Snell aus dem Jahre 1621:

Wenn	α	Einfallswinkel (in Relation zum senkrechten Lot)
	β	Ausfallswinkel im Medium
	n_1	die Materialkonstante (Brechzahl) im Medium 1 (z.B. Luft ~ 1)
	n_2	die Materialkonstante im Medium 2 (Glas ~ 1,5 … 1,6)

Die Brechzahl n ist gleich dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zu der in einem Medium.

dann gilt

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = n}$$

Gl. (1)

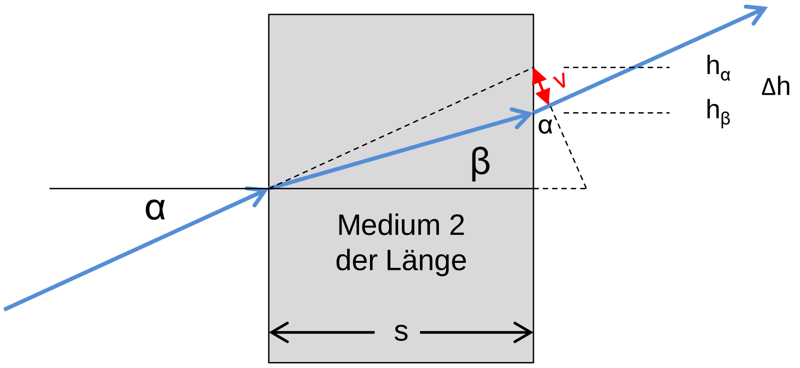


Abb. (I)

Beim Durchgang eines Lichtstrahls durch ein Medium der Länge s ergibt sich ein Versatz des Strahles um den Wert v

mit $h_\alpha = s \tan\alpha$ $\qquad h_\beta = s \tan\beta$

und $\Delta h = h_\alpha - h_\beta$

folgt $v = \Delta h \cos\alpha$

$$\boxed{v = s\,(\tan\alpha - \tan\beta)\cos\alpha}$$

Näherungsweise für kleine Winkel α bzw. β

$v \sim s\,(\sin\alpha - \sin\beta)\cos\alpha$

mit $\sin\beta = 1/n \sin\alpha$

folgt $v \sim s\,(1 - 1/n)\sin\alpha$

Der Versatz macht sich bei dickem Glas durchaus bemerkbar z.B. für 10 mm Glas unter 10 Grad = 0,185 Rad folgt v ~ 0,9 mm

Eine sphärische Linse

Aufbau und Geometrie der sphärischen Linse mit ungleichen Radien

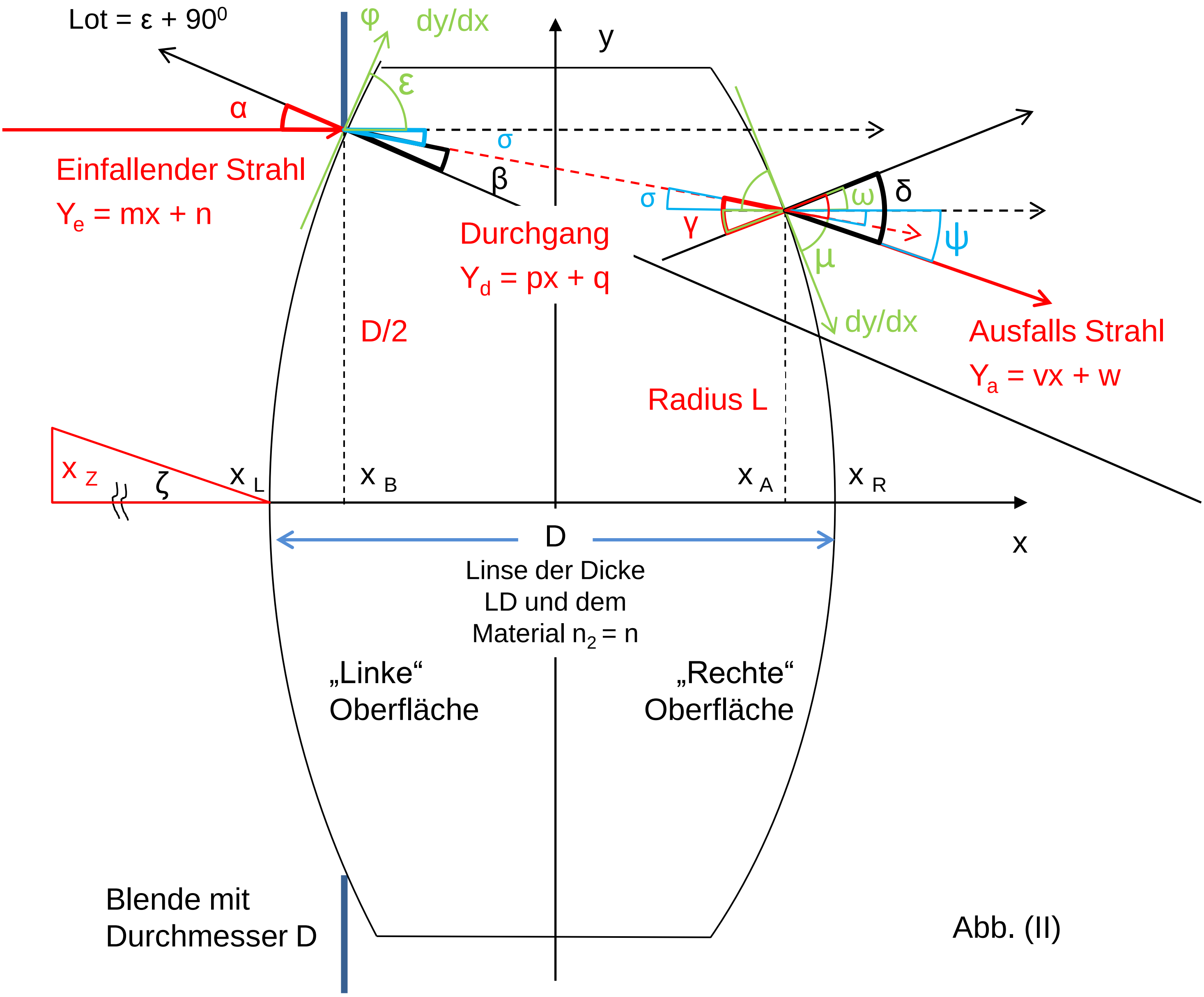


Abb. (II)

Die rotationssymmetrische Linsenoberfläche kann durch einen Kreis mit der Kreisgleichung für die Oberfläche beschrieben werden:

$Y^2 + (x - a)^2 = L^2$	„linke“ Linse mit a > 0 (positiv)	(2)
$Y^2 + (x - b)^2 = R^2$	„rechte“ Linse mit b < 0 (negativ)	(3)

Die Linsendicke ergibt sich aus $LD = (R + b) + (L - a)$

Mit dem Proportionalitätsfaktor $Z = L / D$

Eine sphärische Linse

Von „links“ kommt von einem Ziel ein einfallender Lichtstrahl der im Punkt X_B; Y_B auf die Blende mit dem Durchmesser D fällt.

Am Eintreffpunkt gilt für die Winkel:

- ε Steigungswinkel, d.h. Tangente am „linken“ Kreis
- φ Lotrechter Winkel auf der Linsenoberfläche

  $\varphi = \varepsilon + \P / 2$
- α der Einfallswinkel des einfallenden Lichtstrahls
- β der Ausfallswinkel in der Linse und
- σ der „Knickwinkel“ des Strahls in x,y Koordinaten

Es gilt gemäß Zeichnung für die „linken“ Winkel beim Lichteinfall

$\P / 2 = \alpha + \varepsilon$ (4)

$\P / 2 = \varepsilon + \sigma + \beta$

$\alpha + \varepsilon = \varepsilon + \sigma + \beta$ somit $\boxed{\sigma = -(\alpha - \beta)}$ (5)*

Der durchgehende Lichtstrahl trifft auf die rechte Linsenoberfläche im Punkt X_A;Y_A bei dem folgende Winkel am Ausfallpunkt gelten:

- μ Steigungswinkel, d.h. Tangente am „rechten“ Kreis
- ω Lotrechte Winkel auf der Linsenoberfläche

  $\omega = \mu + \P / 2$
- γ der Einfallswinkel des einfallenden Lichtstrahls in der Linse
- δ der Ausfallswinkel aus der Linse und
- ψ der „Knickwinkel“ des ausfallenden Strahls in x,y Koordinaten

Es gilt gemäß Zeichnung für die „rechten“ Winkel beim Lichtausfall

$\P / 2 = \mu - \sigma + \gamma$ (6)

$\P / 2 = \mu + \delta - \psi$

$\mu - \sigma + \gamma = \mu + \delta - \psi$ somit $\boxed{\psi = -(\delta - \gamma - \sigma)}$ (7)*

Ein parallel einfallender Lichtstrahl wird in einer Linse also insgesamt um

folgenden Knickwinkel gebeugt $\boxed{\psi = -[(\delta - \gamma) + (\alpha - \beta)]}$ (8)*

dabei ist der Winkel Delta δ abhängig von γ Gl. 1

der Winkel Gamma γ abhängig von μ und σ Gl. 6

der Winkel σ ist abhängig von α , β Gl. 5

der Winkel Beta β abhängig von α und ε Gl. 1

Beachte *: σ und ψ sind für alle folgende Rechnungen per Definition negativ !

Einfallender Lichtstrahl auf die Linse am Ort der Blende

Die Geradengleichung des allgemeinen einfallenden Lichtstrahls lautet

$$\boxed{Y_E = m\,x + n} \tag{9}$$

Am Ort der Blende gilt $x = X_B$ und $y = Y_B = D/2$

Die Kreisgleichung der linken Linsenoberfläche lautet

$$Y^2 + (x - a)^2 = L^2$$

In unserem Fall einer Achsenparallelen Einstrahlung gilt für die Gerade

$$m = 0 \quad \text{und}$$

$$\boxed{n = D/2}$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt der Geraden mit dem Kreis aus

$$\boxed{X_B = a - \sqrt{[\,L^2 - (D/2)^2\,]} \qquad \text{bei} \quad Y_B = D/2} \tag{10}$$

Die Steigung/ Tangente am Ort des Schnittpunktes X_B, Y_B ergibt sich durch differenzieren der Kreisgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{[\,L^2 - (x-a)^2\,]}$$

$$= \frac{d}{dx} [\,L^2 - (x-a)^2\,]1/2$$

$$= 0{,}5\,[\,L^2 - (x-a)^2\,]\,(-1/2)\,(-2)\,(x-a) = \tan\varepsilon$$

Für den Ort der Blende des Durchmessers D ergibt sich somit für $x = X_B$

$$\tan\varepsilon = \frac{-(X_B - a)}{\sqrt{[\,L^2 - (X_B - a)^2\,]}} \tag{11}$$

Einsetzen von (10) in (11) ergibt

$$\tan\varepsilon = \frac{-(a - \sqrt{[\ldots]} - a)}{\sqrt{[\,L^2 - (a - \sqrt{[\ldots]} - a)^2\,]}} = \frac{\sqrt{[\ldots]}}{\sqrt{(L^2 - (L^2 - (D/2)^2)}}$$

Somit endgültig

$$\boxed{\tan\varepsilon = 2\,\frac{\sqrt{[\,L^2 - (D/2)^2\,]}}{D}} \tag{12}$$

Hierbei ist L der „linke“ Linsenradius und D der Blendendurchmesser.

Einfallender Lichtstrahl auf die Linse am Ort der Blende

Aus Gl. (4) ergibt sich damit der Einfallswinkel α auf die Linsenoberfläche

$$\alpha = ¶ / 2 - \varepsilon$$

Der Ausfallwinkel in der Linse folgt aus Gl. (1)

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$
$$\sin (¶ / 2 - \varepsilon) = \sin (¶/2) \cos \varepsilon - \cos (¶/2) \sin \varepsilon = \cos \varepsilon = n \sin \beta$$

Darstellen der cos Funktion durch Tangens

$$\cos \varepsilon = 1/ \sqrt{[1 + \tan^2 \varepsilon]}$$

Einsetzen von tan ε aus (12) $\tan \varepsilon = 2/D \sqrt{[L^2 - (D/2)^2]}$

$$n \sin \beta = 1/ \sqrt{[1 + (2/D)^2 [L^2 - (D/2)^2]]}$$

$$n \sin \beta = 1/ \sqrt{[1 + (2L/D)^2 -1]} = 1/ 2L/D = D/2L$$

Damit dann der Winkel β in der Linse

$$\boxed{\text{sind } \beta = \frac{D}{2 n L}} \quad \text{und somit auch} \quad \boxed{\sin \alpha = \frac{D}{2 L}} \qquad (13)$$

Zusammenfassung:

1. Die Steigung ε am Einfallsort der Blende D folgt aus Gl. (12)
2. Der Einfallswinkel α ergibt sich aus Gl. (13)
3. Der „Ausfallswinkel“ β in der Linse folgt aus Gl. (13)
4. Der „Knickwinkel“ σ in der Linse berechnet sich gemäß Gl. (5)

Für den Fall eines mittigen Einfalls eines Achsen-parallelen Lichtstrahls in die Linse für D = 0 folgt sofort

$$\varepsilon = ¶ / 2 = 90^0 \qquad \alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \sigma = 0$$

Durchgehender Lichtstrahl in der Linse

Die Geradengleichung des allgemeinen durchgehenden Lichtstrahls lautet

$$\boxed{Y_D = p\,x + q} \qquad (14)$$

Am Ort der Blende gilt $x = X_B$ und $y = Y_B = B/2$

Die Steigung p der Geradengleichung durch differenzieren

$$p = \tan \sigma$$

Mit dem Additionstheorem der Tangens Winkelfunktion folgt

$$\tan \sigma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\ \tan\beta} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \sin^2 x)}}$$

$$\text{für} \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{(1 - \sin^2\alpha)}} = \frac{D/2L}{\sqrt{(1 - (D/2L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{[(2L/D)^2 - 1]}}$$

Mit der Proportionalitätsfaktor Z = L/D ergibt sich damit

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{(4\,Z^2 - 1)}} \qquad \text{analog} \qquad \tan\beta = \frac{1}{\sqrt{(4n^2Z^2 - 1)}}$$

Damit dann

$$\tan\sigma = \frac{1/\sqrt{(4Z^2 - 1)} - 1/\sqrt{(4n^2Z^2 - 1)}}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{(4Z^2 - 1)}\ \sqrt{(4n^2Z^2 - 1)}}}$$

$$\boxed{\tan\sigma = \frac{\sqrt{(4n^2Z^2 - 1)} - \sqrt{(4Z^2 - 1)}}{\sqrt{(4Z^2 - 1)}\ \sqrt{(4n^2Z^2 - 1)}\ - 1} = p} \qquad (15)$$

Näherungsweise für große Faktoren Z folgt $\quad p = \tan\sigma \sim \dfrac{n - 1}{2nZ}$

Somit die Konstante q in der Gleichung des durchgehenden Lichtstrahles

$$q = Y_B - p\,X_B = D/2 - X_B \tan\sigma$$

mit $X_B = a - \sqrt{[\,L^2 - (D/2)^2\,]} = a - D/2\,\sqrt{(4Z^2 - 1)}$ folgt dann

$$\boxed{q = \frac{D}{2} - a - \frac{D}{2}\sqrt{(4Z^2 - 1)}\ \tan\sigma} \qquad (16)$$

Näherungsweise für große Proportionalitätsfaktoren Z folgt

$$q \sim D/2 - a - D/2\ 2Z\,(n-1)/2nZ \qquad q \sim \frac{D}{2} - a - \frac{D}{2}\,\frac{n-1}{n} = D/2n - a$$

Schnittpunkt des Lichtstrahles mit der rechten Linsenfläche

Der durchgehende Lichtstrahl Y_D trifft bei X_A; Y_A auf den rechten Kreis

$$Y_D = px + q = \sqrt{R^2 - (x-b)^2} \qquad \text{quadrieren}$$

$$Y_D = p^2x^2 + 2qpx + q^2 = R^2 - (x^2 - 2bx + b^2) = R^2 - x^2 + 2bx - b^2$$

$$Y_D = x^2 (1+p^2) + 2x (qp - b) \qquad = R^2 - b^2 - q^2$$

$$Y_D = x^2 + 2x \frac{qp-b}{1+p^2} + [\,\dots\,]^2 \qquad = \frac{R^2 - b^2 - q^2}{1+p^2} + \left[\frac{qp-b}{1+p^2}\right]^2$$

$$Y_D = \left[x + \frac{qp-b}{1+p^2} \right]^2 = \frac{R^2 - b^2 - q^2 + R^2p^2 - b^2p^2 - q^2p^2}{(1+p^2)^2} + \frac{q^2p^2 - 2bqp + b^2}{(1+p^2)^2}$$

$$Y_D = \left[x - \frac{b-qp}{1+p^2} \right]^2 = \frac{R^2 - q^2 + R^2p^2 - b^2p^2 - 2bqp}{(1+p^2)^2}$$

Damit die Lösung der quadratischen Gleichung für x

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{b-qp}{1+p^2} \pm \frac{\sqrt{R^2 - q^2 + R^2p^2 - b^2p^2 - 2bqp}}{1+p^2}}$$

Die für die Linse interessante Lösung ergibt sich (da b<0 ist) aus der positiven Wurzel

$$X_A = \frac{b-qp}{1+p^2} + \frac{\sqrt{R^2 - q^2 + R^2p^2 - b^2p^2 - 2bqp}}{1+p^2} \qquad (17)$$

Die dazu passende Y-Koordinate ergibt sich mit Hilfe der Y_D Gerade zu

$$\boxed{Y_A = p\, x_A + q} \qquad (18)$$

Mit den bekannten Konstanten p und q aus Gl. (15) und (16).

Ausfallender „Fokussierender“ Lichtstrahl

Mit dem Schnittpunkt X_A; Y_A auf der „rechten“ Linsenoberfläche können die Winkel sofort bestimmt werden.

Die Steigung/ Tangente am Ort des Schnittpunktes X_A, Y_A ergibt sich durch differenzieren der Kreisgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{[R^2 - (x-b)^2]}$$

$$= \frac{d}{dx} [R^2 - (x-b)^2]^{1/2}$$

$$= 0{,}5 [R^2 - (x-b)^2] (-1/2) (-2) (x-b) = \tan \mu$$

Für den Ort $x = X_A$ am rechten Linsenrand ergibt sich damit der Winkel

$$\boxed{\tan \mu = \frac{-(X_A - b)}{\sqrt{[R^2 - (X_A - b)^2]}}} \qquad (18)$$

Hierbei ist R der „rechte“ Linsenradius und b der Kreisversatz.

Alle anderen Winkel im Punkt X_A; Y_A können jetzt direkt bestimmt werden

- σ folgt aus Gl. 15
- γ der Einfallswinkel auf die Linse aus Gl. 6 $\quad \gamma = ¶ / 2 - \mu + \sigma$
- δ der Ausfallswinkel aus der Linse mit Gl. 1 $\quad \sin \delta = n \sin \gamma$
- ψ der Knickwinkel direkt aus Gl. 7 $\quad \psi = \delta - \gamma + \sigma$

Die Geradengleichung des allgemeinen ausfallenden Lichtstrahls lautet

$$\boxed{Y_F = v\,x + w} \qquad (19)$$

Am Ort der Blende gilt $x = X_A$ gem. Gl 17 und $y = Y_A$ gem. Gl. 18

Die Steigung v der Geradengleichung ist der bereits berechnete Wert

$v = \tan \mu$

Die Konstante w ergibt sich für X_A; Y_A direkt aus Gl. 19 zu

$$w = Y_A - v\,X_A \qquad (20)$$

Für den Wert y = 0 ergibt sich der fokussierte Brennpunkt f der Linse

$$\boxed{x_F = -\frac{w}{v} = f} \qquad (21)$$

Backup

Excel Rechnungen

Graphisches Beispiel

Excel Rechnungen

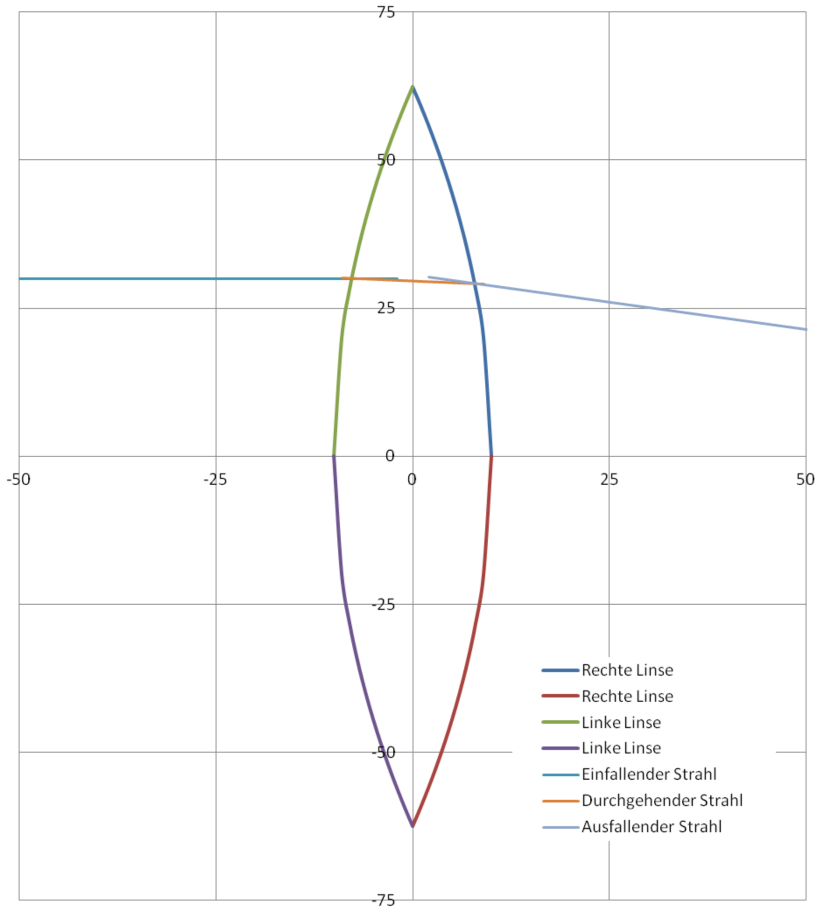
x Wert
-60
-50
-40
-30
-20
-15
-14
-13
-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

1,6	ni	Brechungsindex der Linse
60	D	Blendendurchmesser
20	LD	Linsendicke
3,3333	ZF	Proportionalitätsfaktor

	Winkel in Grad	
-7,737	XB	
30	YB	
0,1506	8,63	alpha
0,0939	5,38	beta
1,4202	81,37	epsilon
-0,057	-3,25	sigma

	Winkel in Grad	
7,8695	XA	
29,114	YA	
-1,425	-81,63	mue
0,2028	11,62	gamma
0,3281	18,80	delta
-0,182	-10,43	psi
166,09	Brennpunkt f	

Linke Linse			Rechte Linse			Einfallender Strahl		Durchgehender Strahl		Ausfallender Strahl	
a	LR		b	RR		m	n	p	q	v	w
190	200		-190	200		0	30	-0,057	29,561	-0,184	30,563
x	y+	y-	x	y+	y-	x	y	x	y	x	y
-60			-10			-50	30	-10		-8	
-50			-9			-40	30	-9	30,072	-7	
-40			-8			-30	30	-8	30,015	-6	
-30			-7			-20	30	-7	29,958	-5	
-20			-6			-15	30	-6	29,901	-4	
-15			-5			-14	30	-5	29,845	-3	
-14			-4			-13	30	-4	29,788	-2	
-13			-3			-12	30	-3	29,731	-1	
-12			-2			-11	30	-2	29,674	0	
-11			-1			-10	30	-1	29,618	1	
-10	0	0	0	62,45	-62,45	-9	30	0	29,561	2	30,195
-9	19,975	-19,97	1	59,321	-59,32	-8	30	1	29,504	3	30,011
-8	28,213	-28,21	2	56	-56	-7	30	2	29,447	4	29,827
-7	34,511	-34,51	3	52,45	-52,45	-6	30	3	29,391	5	29,642
-6	39,799	-39,8	4	48,621	-48,62	-5	30	4	29,334	6	29,458
-5	44,441	-44,44	5	44,441	-44,44	-4	30	5	29,277	7	29,274
-4	48,621	-48,62	6	39,799	-39,8	-3	30	6	29,221	8	29,09
-3	52,45	-52,45	7	34,511	-34,51	-2	30	7	29,164	9	28,906
-2	56	-56	8	28,213	-28,21	-1		8	29,107	10	28,722
-1	59,321	-59,32	9	19,975	-19,97	0		9	29,05	11	28,538
0	62,45	-62,45	10	0	0			10		12	28,354



	200	100	50	25
Blende	Brennpunkt			
D	f	f	f	f
5	173,43	89,99	48,13	26,93
10	173,28	89,72	47,65	26,23
20	172,69	88,60	45,63	22,80
40	170,26	83,83	34,91	
60	166,09	74,06		
80	159,93	56,99		
100	151,38			

f	166,67	83,33	41,67	20,83
theoretisch für dünne Linsen				

Graphischer Test